Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
9 de septiembre de 2011

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____________________

EJERCICIO 1.- La ley de crecimiento de una población viene dada por la ecuación diferencial $y'(t) = 3t^2\left(y(t) - y^2(t)\right)$.

1. ¿Se puede hacer un estudio cualitativo del modelo? Razonar la respuesta.
2. Resolver la ecuación diferencial.

EJERCICIO 2.- Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de cierta clase de gripe, aproximadamente

$$y(t) = \frac{2}{1 + 3e^{-0.8t}}$$

miles de personas han contraído la enfermedad.

1. Trazar una gráfica, aproximada, de $y(t)$, con $y(0) = 750$ personas.
2. ¿Cuántas personas tenían la enfermedad al comienzo?
3. Encontrar el momento en que la epidémia se propaga con mayor velocidad.
4. Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas en total, a largo plazo, contraerán la enfermedad?

EJERCICIO 3.- Supongamos que estamos calentando un cultivo de *E. coli* a 100^oC, en una habitación que se encuentra a una temperatura de 22^oC, y comprobamos que a los 5 minutos la temperatura del cultivo es de 93^oC. Queremos inocular el cultivo cuando se alcancen los 40^oC.

Sea $T(t)$ la temperatura del cultivo. Si suponemos que se cumple la ley de enfriamiento de Newton, encontrar la ecuación diferencial que modeliza la situación anterior y resolverla.

Encontrar cuanto tiempo es necesario que transcurra para inocular el cultivo. Dibujar la gráfica de $T(t)$ para la primera hora.

EJERCICIO 4.- Sea $x(t)$ el número de peces en un estante en el tiempo t, y $y(t)$ el número de patos en el tiempo t. Sabemos que los peces crecen con una velocidad constante igual a 3, siendo 5 su número inicial, y que el ritmo de decrecimiento de la cantidad de patos $y(t)$ es proporcional (con constante de proporcionalidad igual a -1) al producto entre la cantidad de peces y la cantidad de patos. Se pide:

- Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de peces $x(t)$.
- Escribir y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de patos en el instante t, con $y(0) = 5$.
- Estudiar el comportamiento, a largo plazo, de las dos especies.

EJERCICIO 5.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 3^t\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3\cdots\,,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t.

1. Encontrar la solución y_t^h de la ecuación homogénea para los valores $y_0^h = 3$, $y_1^h = 5$.
2. Encontrar la **solución general** y_t de la ecuación completa.

EJERCICIO 6.- La siguiente ecuación en diferencias describe la población de peces en años sucesivos,

$$y_{t+1} = y_t\, e^{r\left(1-\dfrac{y_t}{1000}\right)}\,, \quad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

siendo r un parámetro positivo y y_t el número de insectos en el año t.

1. ¿Puede desaparecer la población a largo plazo?
2. ¿Cuál será el valor de la población a largo plazo, si $r = 1.5$?

EJERCICIO 7.- Sea una población de hembras dividida en tres clases de edades de 5 años de duración. Su evolución está determinada por un modelo de Leslie siendo su matriz,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?
2. Encontrar el valor de α para que cada 5 años la población aumente en un 50%
3. Para el valor de α anteriormente encontrado. Si a largo plazo el número de hembras es de 1350, ¿cuántas de ellas serán jóvenes?