Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
16 septiembre de 2010

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- La población de cierta especie de animales está dividida en tres grupos de edad (jóvenes, medianas y adultas). Cada hembra jovén aporta, por término medio, una cría y cada hembra mediana 4 crías. Además, 3 de cada 5 hembras jóvenes sobreviven y llegan a ser medianas, y la tercera parte de medianas sobreviven y se hacen adultas.

1. Si inicialmente hay 15 jóvenes, 6 medianas y 3 adultas. Encontrar el **porcentaje** de hembras jóvenes en el tercer año.
2. Encontrar los porcentajes de hembras en cada una de las clases a largo plazo, haciendo uso de los valores y vectores propios de la matriz de transición, y relacionar el resultado obtenido con el apartado anterior.
3. ¿Aumenta o disminuye la población a largo plazo? ¿En qué porcentaje?.

EJERCICIO 2.- Sea y_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene dada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 3$$

1. Si la solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_t^h = C_1\,1^t + C_2\,2^t$, encontrar el valor de los parámetros a y b.
2. Si inicialmente el número de individuos era de $y_0 = 2$ y al año siguiente su número era $y_1 = 4$, encontrar la población después de 4 año.

EJERCICIO 3.- Algunas poblaciones de animales se rigen por el siguiente modelo discreto no lineal:

$$f(N_t) = N_{t+1} = N_t\left(1 + r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) \; ; \quad r,\, K > 0, \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$$

Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

EJERCICIO 4.- Sea $y(t)$ el número de individuos de una población en el tiempo t. La evolución de esta población viene determinada por una ecuación diferencial autónoma $y'(t) = f(y)$ que tiene a $y(t) = 5$ como un único punto de equilibrio, el cual es asintóticamente estable.

1. Encontrar una ecuación diferencial que cumpla los requisitos anteriores para modelizar a esta población.
2. Resolver la ecuación diferencial del apartado anterior y comprobar que cuando t tiende hacia infinito $y(t)$ tiende hacia 5.

EJERCICIO 5.- Supongamos que los recursos mundiales sólo proporcionan alimento suficiente para seis mil millones de seres humanos. La población mundial fue de 1.6 mil millones en 1900 y de 2.4 mil millones en 1950. Averiguar cual será la población mundial en el año 2012.

EJERCICIO 6.- Un depósito contiene 100 litros de agua contaminada en los que están disueltos 10 kilos de contaminante. El agua contaminada empieza a fluir al depósito a una velocidad de 10 litros por minuto. La concentración del contaminante en esta corriente de entrada en el instante t es $c(t) = 0.3 + e^{0.2t}$ kilos por litro. La solución del depósito se mezcla uniformemente y el agua contaminada fluye hacia el exterior a una velocidad de 10 litros por minuto. Obtener un modelo matemático para esta situación y encontrar la cantidad de contaminante $y(t)$ en el depósito en un minuto cualquiera t. Con el paso del tiempo, ¿aumenta o disminuye la cantidad de contaminante en el depósito?

EJERCICIO 7.- Las funciones $x(t); y(t)$ representan los efectivos de dos especies animales inicialmente integradas por 20 y 10 individuos respectivamente. La dinámica del sistema está gobernada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = & y(t) \\ y'(t) = & -2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

medido el tiempo t en años. Encontrar el número de individuos para $t = 5$ años.

Jaén 16 septiembre de 2010