Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
7 Julio de 2010

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____

EJERCICIO 1.- Una sala de cine decide programar las películas según el siguiente método: si una semana se proyectó una norteamericana, a la semana siguiente se programará una norteamericana. Si la película programada fue española, la semana siguiente una de cada dos será española y una de cada dos francesa. Finalmente, si la película programada fue francesa, la semana siguiente se programará norteamericana una de cada tres y dos de cada tres francesa. Si inicialmente las cuotas de pantalla son el 60 % para el cine norteamericano, el 30% para el cine español, y el 10 % para el francés.

1. ¿Estamos ante una cadena de Markov regular? Justifica la respuesta.
2. Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo.
3. ¿Puedes deducir el resultado anterior analizando el diagrama de estados?

EJERCICIO 2.- Sea N_t el número de individuos de una población en el año t. La evolución de dicha población viene dada por la siguiente ecuanción en diferencias no lineal:

$$N_{t+1} = \frac{10\, e^r\, N_t}{10 + (e^r - 1)N_t}; \qquad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$$

Demuestra que si el parámetro r es positivo, entonces la población, a largo plazo, se estabilizará en 10 individuos y si r es negativo la población desaparecerá.

EJERCICIO 3.- Sea y_t el número de árboles de un bosque en el año t. Una compañía maderera tala cada año un 5% de los árboles y planta 300 nuevos.

1. Si inicialmente hay 10000 árboles en ese bosque. Determinar el número de árboles en cualquier año t.
2. ¿+Cuántos árboles habrá en el bosque a largo plazo? Comprueba el resultado anterior haciendo uso de un diagrana de Cobweb.

EJERCICIO 4.- Una enfermedad se propaga sobre una población. Se sabe que la velocidad de crecimiento de la proporción de afectados viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}y(t)$$

siendo $y(t)$ la proporción de la población que ha sido expuesta a la enfermedad a los t años de su introducción. Si en el momento inicial la población estaba sana, ¿cuál será la proporción de enfermos a los dos años?

EJERCICIO 5.- Un cultivo de bacterias sigue la siguiente ley. $y'(t) = y^3 - 5y^2 + 6y$, siendo $y(t)$ la cantidad de bacterias en el momento t. ¿Cuál debería ser el número inicial de bacterias para que la población creciese sin límites? ¿Existe algún valor inicial para el cual la población desaparecerá? Justifica las respuestas.

EJERCICIO 6.- Inicialmente un tanque contiene 10 litros de agua en el que se encuentra disuelto 20 gramos de sal. Una disolución de agua salada entra en el tanque a un ritmo de 0.5 litros por minuto siendo la concentración de sal en este flujo de entrada en el instante t de $4t$ gramos por litro. Al mismo tiempo por un segundo grifo entra agua pura a un ritmo de 1.5 litros por minuto. La disolución perfectamente mezclada sale del tanque a un ritmo de 2 litros por minuto. Calcular la cantidad de sal en el tanque en un minuto cualquiera t.

EJERCICIO 7.- Dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = \ \ 8x(t) - 5y(t) \\ y'(t) = 10x(t) - 7y(t) \end{cases}$$

Encuentra los valores de $x(2)$ e $y(3)$ para los valores iniciales $x(0) = 3$ e $y(0) = 5$ ¿Qué le sucede a ambas poblaciones a largo plazo?

Jaén 7 Julio de 2010