

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: _____

EJERCICIO 1.- Anualmente una planta tiene flores todas de un mismo color, que pueden ser rojas, amarillas o blancas. Se sabe que si un año las flores son rojas, entonces al año siguiente también lo serán, y que si un año son amarillas al año siguiente serán todas amarillas. Por otro lado, si un año las flores son blancas, entonces el año siguiente no pueden ser rojas, y tienen la misma probabilidad de ser amarillas o blancas.

Si tenemos 10 plantas con flores rojas, 20 plantas con flores amarillas y 30 con flores blancas, ¿cuál será la distribución de colores después de 50 años?

EJERCICIO 2.- Encontrar la solución particular, para los diferentes valores del parámetro real α , de la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} - \alpha y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

EJERCICIO 3.- Una población evoluciona según el siguiente sistema dinámico discreto:

$$y_{t+1} = f(y_t) = \sqrt{y_t}, \quad y_t > 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t .

- Encuentra y clasifica los puntos de equilibrio.
- Calcula la órbita para una semilla $y_0 = 9$.
- Comprueba los resultados anteriores haciendo uso del diagrama de Cobweb con los valores iniciales $y_0 = 0.5, y_0 = 4$.

EJERCICIO 4.- Un depósito con una capacidad de 100 litros está medio lleno de agua limpia. Se abre una cañería que permite introducir aguas residuales en el depósito, que son procesadas a un ritmo de 4 litros/minuto. Al mismo tiempo se abre un desagüe que permite desalojar la mezcla a un ritmo de 4 litros/minuto. Si las aguas residuales procesadas contienen 10 gramos de potasio utilizable por litro, ¿cuál será la concentración de potasio a largo plazo en el depósito?

EJERCICIO 5.- Un estudio de la población de Botsuana desde 1975 a 1990 conduce al siguiente modelo para el ritmo de crecimiento del país,

$$y'(t) = 0.02ty(t) - 0.035t$$

siendo $y(t)$ la población en el tiempo t . Además, t representa el tiempo en años, con 1990 correspondiendo a $t = 0$. Calcula la población de Botsuana en el año 2010, sabiendo que en 1990 era de 1.85 millones de personas.

EJERCICIO 6.- Un método para administrar un fármaco es suministrarlo continuamente en la sangre. Este proceso puede ser modelado mediante la ecuación diferencial,

$$y'(t) = A - \alpha y(t), \quad (1)$$

donde $y(t)$ es la concentración en la sangre en el tiempo t , α es una constante positiva y el parámetro $A > 0$ es el ritmo con el que se administra el fármaco.

- Si $y(0) = y_0$, resuelve la ecuación diferencial (1) para conocer la concentración en un instante cualquiera. ¿A qué límite tiende dicha concentración cuando t tiende hacia infinito?
- Realiza un estudio cualitativo de la ecuación diferencial (1) y relaciona el resultado con el obtenido en el apartado anterior.

EJERCICIO 7.- Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos poblaciones que evolucionan según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

- Realiza un estudio cualitativo del modelo.
- Encuentra los valores de $x(t)$ e $y(t)$ para los valores iniciales $x(0) = 0$ e $y(0) = 7$. ¿Qué le sucede a ambas poblaciones a “largo plazo”. Relaciona el resultado con el obtenido en el primer apartado.