Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(8-Septiembre-2009)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- Dado el modelo discreto matricial:

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} ; \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$$

1. Si la unidad de tiempo se considera igual a un año; explicar el significado de cada uno de los coeficientes de la matriz.
2. Calcular el valor de α para que a largo plazo la población desaparezca, tienda a un equilibrio no nulo y crezca exponencialmente. En el caso de tender al equilibrio no nulo, encontrar a qué proporciones tienden las dos clases de edad.
3. Hallar el valor de α para que la población crezca un 10% anualmente ¿Tienden las clases de edad, en este caso, hacia unas proporciones constantes? En caso afirmativo encontrarlas ¿Podrá crecer la población un 20% anualmente?

EJERCICIO 2.- Cierta especie de aves se mueve entre tres asentamientos, A, B, y C, según la siguiente tabla de migraciones anuales:

	Pasan a A	Pasan a B	Pasan a C
Las aves de A	100%	0%	0%
Las aves de B	0%	100%	0%
Las aves de C	0%	50%	50%

1. Si inicialmente hay, en miles de aves, $A_0 = 2$, $B_0 = 3$ y $C_0 = 6$. Calcular el número de aves en cada asentamiento pasados tres años.
2. De seguir con este esquema, ¿cuál sería el número aves después de 100 años?

EJERCICIO 3.- La siguiente ecuación en diferencias describe la evolución de una población en años sucesivos,

$$x_{t+2} - x_{t+1} = -0.25 x_t + \left(\frac{1}{2}\right)^t , \quad t = 0,\, 1,\, 2, \cdots$$

siendo x_t el número de individuos en el año t. Encontrar el valor de x_t y estudiar su comportamiento a largo plazo.

EJERCICIO 4.- Una lámina de plata se calienta a 100^0C para esterilizarla. Supongamos que la plata se coloca en una habitación que se encuentra a 20^0C y que la plata se enfría de acuerdo a la ley Newton. Después de 10 minutos la temperatura de la plata es de 80^0.

1. Escribir una ecuación diferencial que describa la evolución de la temperatura $T(t)$ de la plata y resolverla para cualquier tiempo $t \geq 0$.
2. Encontrar el momento en que la temperatura de la plata es de 30^0 y pueda ser inoculada con un cultivo de células.

EJERCICIO 5.- Un depósito contiene 100 litros de agua contaminada en los que están disueltos 10 kilos de contaminante. El agua contaminada empieza a fluir al depósito a una velocidad de 10 litros por minuto. La concentración del contaminante en esta corriente de entrada en el instante t es $c(t) = 0.2 + e^{0.2t}$ kilos por litro. La solución del depósito se mezcla uniformemente y el agua contaminada fluye hacia el exterior a una velocidad de 10 litros por minuto. Obtener un modelo matemático para esta situación y encontrar la cantidad de contaminante $y(t)$ en el depósito en un minuto cualquiera t. Con el paso del tiempo, ¿aumenta o disminuye la cantidad de contaminante en el depósito?

EJERCICIO 6.- Realizar un estudio de la ecuación diferencial, (1), para conocer el comportamiento a largo plazo de $y(t)$,

$$\frac{dy}{dt} = y' = (y-1)(e^{3-y} - 1)\,. \tag{1}$$

Si $y(t)$ representa la cantidad de zorros en el día t y su valor inicial es de 5 zorros, ¿cómo se comportaría esta población a lo largo del tiempo?

EJERCICIO 7.- La dinámica de dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ viene determinada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

1. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo haciendo uso de la matriz jacobiana.
2. Resolver el sistema anterior, para los valores iniciales $x(0) = 4\,,\, y(0) = 2$