Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(6-Febrero-2009)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____

EJERCICIO 1.- La presencia de toxinas en un cierto medio destruye el cultivo de bacterias. Si no hubiera toxinas las bacterias crecerían con una velocidad proporcional a la cantidad total de bacterias existente, pero la presencia de las toxinas hace que dicha velocidad de crecimiento sea reducida en una constante. Si el número de bacterias inicial fuera de 1000 y la constante de proporcionalidad fuera de 2, ¿cuántas unidades de tiempo tendría que pasar para que hubiera 10000 bacterias, sabiendo que la reducción constante es de 100?

EJERCICIO 2.- Sea $y(t)$ el número de aves en el día t. La evolución de esta población viene dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (y-\alpha)(y-3)\,, \qquad \alpha \geq 0$$

1. Hacer un estudio cualitativo de la ecuación diferencial para analizar el comportamiento a largo plazo de las soluciones $y(t)$ según los diferentes valores del parámetro α.
2. Para el valor de $\alpha = 0$, trazar de forma aproximada las soluciones correspondientes a los valores iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = 3$, $y(0) = 5$.

EJERCICIO 3.- Un depósito de 100 litros de capacidad contiene 50 litros de agua en los que están disueltos 125 gramos de sal. El depósito tiene dos válvulas de entrada y una de salida. Por una de ellas entra agua pura a una velocidad de 3 litros/minuto, por otra entra agua a una velocidad de 5 litros/minuto con una concentración de sal de 2 gramos/litro y por la tercera el agua salada sale a una velocidad de 6 litros/minuto.

1. ¿Cuánta sal habrá en el depósito en el momento que se llena?
2. ¿En qué instante la concentración de sal en el depósito es de 1 gramo/litro?

EJERCICIO 4.- Un modelo simple para estudiar la evolución de una epidemia en una ciudad viene dado por el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} \dfrac{dx}{dt} = x'(t) & = & -3x + 2y & ; \quad x(0) = 3 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = y'(t) & = & 2y & ; \quad y(0) = 5 \end{array} \right.$$

donde $x(t)$, $y(t)$ representan al número (en miles) de individuos susceptibles e infectados respectivamente, en el tiempo t expresado en días. Calcular el número de susceptibles e infectados después de 15 días.

EJERCICIO 5.- Sea x_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Se sabe que año tras año sobreviven el 45% de los animales y además se incorporan 11 a la población.

1. Encontrar y resolver la ecuación en diferencias que modeliza a la situación planteada.
2. Encontrar y clasificar analíticamente los puntos de equilibrios del modelo.
3. Calcular los tres primeros términos de las órbitas correspondientes a las semillas:

$$x_0 = 5\,, \quad x_0 = 40\,.$$

4. Construir los diagramas de Cobweb del apartado anterior, e interpretar biológicamente los resultados obtenidos.

EJERCICIO 6.- En un animalario se alimentan las cobayas con tres alimentos diferentes A, B, y C. La persona encargada de alimentarlas ha observado, después de varios años, que si se les deja elegir cada mañana el alimento, la probabilidad de que elija cada una de ellas el mismo al día siguiente es 1/2, y elige cualquiera de los otros dos tipos de alimento con la misma probabilidad.

1. Dibujar el diagrama de estados y construir la cadena de Markov
2. Si el primer día se le presentan tres recipientes: uno con el alimento A y dos con el B, y se deja elegir al azar, calcular el vector de distribución de probabilidades a los dos días.
3. ¿Cuál es la distribución de probabilidad a la larga?,¿Depende del vector inicial? Justificar las respuestas.

EJERCICIO 7.- El crecimiento de una especie viene descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 6t + 1\,; \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \cdots$$

donde y_t representa a la cantidad de animales en el año t. Determinar el número de animales al finalizar un año cualquiera“t”.