**Universidad de Jaén**
**Departamento de Matemáticas**
(24-Junio-2009)

# EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

**NOMBRE:** ______________________________

**EJERCICIO 1.-** El modelo macroeconómico de *Samuelson* se rige por las ecuaciones:

$$y_t = C_t + I_t\,; \qquad C_t = b\,y_{t-1}\,; \qquad I_t = k\,(C_t - C_{t-1}) + G\,; \qquad t = 2, , 3,\, 4, \cdots$$

Supongamos que $b = 1$ , $k = 0.5$ , $G = 2$. Encontrar el valor de $y_t$ para un valor de $t$ suficientemente grande.

**EJERCICIO 2.-** Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de animales dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos).

1. Demostrar que, a largo plazo, la población crecerá un 27% cada período de tiempo.
2. Se desea que la población no crezca y para ello se permite la caza de los adultos. Si $h$ es la proporción de adultos cazados en cada período, ¿cuál será la matriz de transición?
   - Demuestra que si $h = 0.6$ entonces la población de animales desaparecerá.
   - ¿Es posible encontrar un $h$ de tal manera que la población permanezca constante?

**EJERCICIO 3.-** La siguiente ecuación en diferencias describe la evolución de una población en años sucesivos,

$$x_{t+1} = \frac{r x_t}{1 + \dfrac{r-1}{K}\, x_t}\,, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo $r$ y $K$ parámetros positivos y $x_t$ el número de individuos en el año $t$.

1. Encontrar el valor de la población a largo plazo, si $r = 1.5$ y $k = 100$

**EJERCICIO 4.-** Una población crece exponencialmente durante $T$ meses con una constante de crecimiento de 0.03 por mes. Luego, la constante de crecimiento aumenta de manera repentina a 0.05 por mes. Después de 20 meses se duplica la población inicial, ¿en qué momento $T$ cambió la constante de crecimiento?

**EJERCICIO 5.-** Un termómetro se lleva al exterior de un dispositivo donde su temperatura es de 70 grados centígrados. Al cabo de 5 minutos el termómetro registra 60 grados centígrados y 5 minutos después registra 54 grados centígrados.

1. Si se cumple la ley de enfriamiento de *Newton*, plantea y resuelve la ecuación diferencial que modeliza a esta situación.

2. Encontrar la temperatura exterior del dispositivo.

**EJERCICIO 6.-** Se ha determinado experimentalmente que la variación de peso de un pez varía según la ley:

$$\frac{dy}{dt} = y' = \alpha y^{\frac{2}{3}} - \beta\, y \tag{1}$$

donde $y = y(t)$ representa al peso del pez en el momento $t$, y los parámetros positivos $\alpha$ , $\beta$ son característicos de cada especie. Realizar un estudio de la ecuación diferencial, (2), para conocer el comportamiento a largo plazo de $y(t)$, y extraer las consecuencias biológicas del mismo.

**EJERCICIO 7.-** La interacción cooperativa entre dos especies autolimitantes se modela con el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = (4 - 2x + y)x \\ y' = (4 + x - 2y)y \end{array} \right. \tag{2}$$

siendo $x(t)$ , $y(t)$ el número de individuos de la primera y segunda especie, respectivamente.

1. Estudiar cualitativamente el sistema (2), y extraer las consecuencias biológicas.

2. Clasificar los puntos de equilibrio de (2), haciendo uso de la matriz jacobiana.