Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(19-septiembre-2008)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- Un agricultor puede cultivar flores rojas o amarillas. Se sabe que si en un año cultiva rojas, entonces la probabilidad de que el año siguiente cultive rojas es 0.6. Por otro lado, si un año cultiva amarillas, entonces la probabilidad de que al año siguiente cultive amarillas es del 100%.

1. Si este año ha plantado flores rojas, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de dos años cultive flores amarillas?.
2. La cadena de Markov no es regular, ¿por qué? Por tanto, para estudiar el comportamiento a largo plazo se tiene que hacer a través de la matriz diagonal ¿Cuál es la probabilidad de que "a largo plazo" cultive flores rojas?

EJERCICIO 2.- Disponemos de una población de animales dividida en clases de edad de 6 meses de duración. De las siguientes matrices de Leslie,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} ; \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

selecciona aquella que sea adecuada para realizar la siguiente explotación racional y duradera. La población inicial es de 500 animales, siendo el precio de venta de los animales más jóvenes de 10 euros. Calcular el importe de las ventas realizadas después de cinco años sabiendo que separación la realizamos sólo en la clase de menor edad.

EJERCICIO 3.- La siguiente ecuación en diferencias describe la población de ardillas en años sucesivos,

$$x_{t+1} = x_t^3 - 3x_t^2 - 3x_t + a\,, \quad t = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

siendo a un parámetros positivo y x_t el número de ardillas en el año t .

1. Encuentra el valor del parámetro a sabiendo que existe un punto de equilibrio en $x^* = 2$
2. Clasificar los puntos de equilibrios que tienen sentido biológico para conocer el comportamiento a largo plazo de la población.

EJERCICIO 4.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$y_{t+2} + 9y_t - 10 = 0\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo y_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el cuarto año, sabiendo que inicialmente eran 10 y al año siguiente 23 individuos.

EJERCICIO 5.- Sea $y(t)$ el número de individuos de una población de aves en el tiempo t. Se sabe que su dinámica viene determinada por la siguiente ecuación diferencial

$$y'(t) = -0.2(y^3 - 101y^2 + 100y)$$

realizar un estudio cualitativo para predecir el comportamiento a largo plazo de esta población según los distintos valores iniciales $y(0)$.

EJERCICIO 6.- Supongamos que una noticia se comunica de "boca en boca" en una población en la que todos los vecinos se conocen. Además, la noticia no se olvida y el número de personas que se enteran de ella por primera vez en un instante dado depende de los siguientes factores:

- La posibilidad de encuentro entre individuos que conocen la noticia con los que aún no la conocen en dicho instante.
- El interés por contar la noticia del individuo que la conoce y el interés por escucharla del que no la conoce.

Sea $y(t)$ el número de individuos de la población que ya conoce la noticia en el instante t.

1. Modelar la situación anterior a través de un modelo continuo y resolver la ecuación diferencial que aparece.
2. Justificar el siguiente hecho: cuando la noticia ha sido escuchada por más de la mitad de la población, ésta se difunde con menor rapidez que cuando la han escuchado menos de la mitad.

EJERCICIO 7.- Un depósito de 50 litros contiene una solución compuesta por un 90% de agua y 10% de alcohol. Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda solución que contiene agua y alcohol a partes iguales, a un ritmo de 4 litros/minuto. Al mismo tiempo se vacía el tanque a una velocidad de 5 litros/minuto. Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, hallar el alcohol que queda en él después de 10 minutos.

EJERCICIO 8.- La dinámica de dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$ viene determinada por el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

1. Realiza un estudio cualitativo para conocer el comportamiento a largo plazo de ambas poblaciones
2. Resuelve el sistema anterior