Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(14-Junio-2008)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- Estudiamos una población de aves (con el mismo número de machos que de hembras). Se sabe que un 12% de las nacidas en un año pasan a adultas al año siguiente y que todas las adultas mueren al año siguiente. Además, cada hembra adulta produce dos hembras cada año.

1. Transcurridos unos años, determinar en que tanto por ciento crecerá o decrecerá anualmente la población.
2. Después de unos años, se sabe que la población de hembras será de 1000, ¿cuántas de ellas serán adultas?
3. Determinar cuál debe ser el tanto por ciento de supervivencia de las hembras jóvenes para que la población se mantenga estable.

EJERCICIO 2.- La evolución de una población x_t viene determinada por el siguiente modelo discreto exponencial con inmigración y emigración,

$$x_{t+1} = (1+r)x_t - \mu\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo el parámetro positivo μ la diferencia entre el número de personas que entran y las que salen, el parámetro r la tasa de crecimiento de la población, y x_0 el número inicial de individuos.

1. Estudiar el comportamiento a largo plazo del modelo según los diferentes valores del parámetro r.
2. Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb, para $r = 0.2$ y $\mu = 10$.

EJERCICIO 3.- La siguiente ecuación en diferencias describe la población de insectos en un manglar en años sucesivos,

$$x_{t+1} = \alpha x_t e^{-x_t}\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo α un parámetro positivo y x_t el número de insectos en el año t ¿Cuál debe ser el valor de α para que el punto de equilibrio no trivial sea estable?

EJERCICIO 4.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$5x_{t+2} - 6x_{t+1} + x_t = \left(\frac{1}{5}\right)^t\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots$$

siendo x_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el quinto año, sabiendo que inicialmente eran 10 y al año siguiente 20.

EJERCICIO 5.- La población de Canada era de 24.070.000 en 1990 y 26.620.000 en 2000. Supongamos que la población crece directamente proporcional al número de individuos presentes en cada momento.

1. Encontrar la población para un tiempo cualquiera t y determinar el momento en el que se duplicara la población.
2. Para los mismos años, la población de Kenya era de 16.681.000 y 24.229.000, respectivamente. Bajo las mismas hipótesis de crecimiento, encontrar el momento en el que se duplicará la población de Kenya.
3. Calcular el año en el que las poblaciones de ambas naciones sean iguales.

EJERCICIO 6.- Supongamos el modelo poblacional,

$$\frac{dy}{dt} = 0.02y(t)\ln\left(\frac{4}{y(t)}\right), \quad y(0) = 3$$

donde $y(t)$ representa al número de individuos en el tiempo t.

1. Hacer un estudio cualitativo de la solución a partir de la ecuación diferencial
2. Estudiar la estabilidad de las soluciones constantes de la ecuación del problema de valores iniciales.

EJERCICIO 7.- Una lámina de plata se calienta a 100^0C para esterilizarla. Supongamos que la plata se coloca en una habitación que se encuentra a 20^0C y que la plata se enfría de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton. Después de 10 minutos la temperatura de la plata es de 80^0C.

1. Escribir una ecuación diferencial que describa la evolución de la temperatura $T(t)$ de la plata y resolverla para cualquier tiempo $t \geq 0$
2. Encontrar el momento en el que la temperatura de la plata es de 30^0 y pueda ser inoculada con un cultivo de células.

EJERCICIO 8.- En una selva tropical estudiamos dos poblaciones $x(t)$, $y(t)$. La dinámica de su comportamiento viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = 4y(t) - x(t)y(t) \end{cases}$$

Se sabe que inicialmente $x(0) = 7$, $y(0) = 5$.

1. Si ambas especies están aisladas, modificar el modelo para conocer el número de individuos en $t = 3$
2. Si ambas especies están en contacto, analizar su comportamiento a largo plazo.