Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(14-Diciembre-2007)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____________________

EJERCICIO 1.- Una población de aves se encuentra repartida entre dos humedades A y B. Se sabe que cada día un 20% de aves del huedal A se traslada a B mientras que un 30% de aves de B lo hace a A.

1. Si inicialmente hay el mismo número de aves en cada humedad, ¿qué porcentaje de éstas se encuentran en cada uno de ellos después de dos días?
2. ¿Qué porcentaje de ellas debe haber en cada humedad si se sabe que este porcentaje se mantiene constante a través del tiempo?. Comprueba el resultado
3. ¿Cuál es el porcentaje de aves en cada humedad después de un número elevado de días?

EJERCICIO 2.- La tabla siguiente corresponde a la distribución en tres intervalos de edad de una población de ciervas de hasta 6 años en 2002 y 2004.

Edad	Núm. ciervas 2002	Núm crías 2002-2004	núm. ciervas 2004
$[0, 2)$	10	0	170
$[2, 4)$	20	80	5
$[4, 6]$	30	90	5

1. ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?
2. Encontrar el número de ciervas para cada una de las clases en el año 2006
3. Si disponemos de 260 ciervas y sacrificamos la clase de menor edad, ¿cuál es el importe de la venta si el precio de cada cierva joven es de 30 euros?

EJERCICIO 3.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 2y_t = 12\,, \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, 3\cdots\,,$$

siendo y_t el número de individuos en el año t. Encontrar el número de individuos en el cuarto año, sabiendo que inicialmente eran 2 y al año siguiente 6 individuos.

EJERCICIO 4.- Se sabe que la evolución de una población de una determinada especie de peces viene dada por el **sistema dinámico discreto lineal**

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

1. Encuentra una función f de tal manera que la población a largo plazo se estabilice en 10 individuos independientemente del número inicial de peces.
2. Comprueba el resultado anterior por medio del diagrama de Cobweb con los valores iniciales: $y_0 = 1$ peces y $y_0 = 20$ peces.

EJERCICIO 5.- Una epidemia se desarrolla en una población de 1000 habitantes de una forma tal que, en cada momento del tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas enfermas por el número de personas sanas.

1. Resuelve la ecuación diferencial que modela la situación planteada
2. Sabiendo que inicialmente el número de personas infectada es de 40 y que el momento en el que la epidémia se propaga con mayor rapidez es el cuarto día, ¿cuántas personas estarán infectadas a los diez días de iniciarse la epidémia?

EJERCICIO 6.- Supongamos el modelo poblacional,

$$\frac{dy}{dt} = 0.02(25y - y^3)$$

donde $y(t)$ representa al número de individuos en el tiempo t.

1. Estudiar el comportamiento a largo plazo de esta población.
2. ¿Está relacionado este modelo con algunos de los modelos elementales estudiados?

EJERCICIO 7.- Sean $x(t)$, $y(t)$ dos especies que compiten por los recursos disponibles. Su evolución a lo largo del tiempo viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x^2 + xy \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - 4y + 2xy \end{cases}$$

1. Encuentra los puntos de equilibrio y estudia la evolución de las dos poblaciones en el plano fase.
2. ¿Pueden convivir ambas especies a largo plazo?

EJERCICIO 8.- Un depósito contiene inicialmente 3 kilos de sal disuelta en 100 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito por un grifo salmunera que contiene α kilos de sal por litro a una velocidad de 2 litros/minuto. Simultáneamente, se sacan del depósito 2 litros/minuto de la mezcla resultante.

1. Encuentra el valor de la concentración α para que “a largo plazo” la cantidad de sal en el depósito sea de 10 kilos