

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: _____

EJERCICIO 1.- Supongamos el modelo discreto matricial

$$X(\vec{t} + 1) = AX(\vec{t}), t = 0, 1, 2, \dots \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0.75 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ¿Son todos los estados accesibles?
2. Si $X(\vec{0}) = (10, 20, 0)^T$, ¿cuál será la distribución después de 30 años?

EJERCICIO 2.- Sea una población de hembras dividida en tres clases de edades de 5 años de duración. Su evolución está determinada por un modelo de Leslie siendo su matriz,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ¿Desaparecerá esta población a largo plazo?
2. Encontrar el valor de a_2 para que cada 5 años la población aumente en un 50%
3. Para el valor de a_2 anteriormente encontrado. Si a largo plazo el número de hembras es de 800, ¿cuántas de ellas serán jóvenes?

EJERCICIO 3.- Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$2y_{t+2} - 3y_{t+1} + y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t . Encontrar la solución general y_t de la ecuación completa.

EJERCICIO 4.- Sea x_t el número de peces en un lago en el mes t . Se sabe que la población en un mes cualquiera es el 75% de la población del mes anterior y además se agregan 15 peces al lago.

1. Plantea y resuelve la ecuación en diferencias que modeliza la situación anterior
2. La población a largo plazo crece sin límite, ¿verdad o falso?. ¿Depende el comportamiento de la población inicial de peces?.
3. Confirma la respuesta de apartado anterior haciendo uso del diagrama de Cobweb

EJERCICIO 5.- Una población de salmones se pescan con una tasa constante y crecen según un modelo logístico, es decir,

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - H$$

donde $y(t)$ representa al número de peces en el mes t . Se sabe que la tasa de crecimiento es 0.2 por mes, la capacidad de carga del lago 40 peces y la tasa de pesca es de 1.5 salmones al mes. Realizar un estudio cualitativo del modelo para analizar el comportamiento a largo plazo de la población.

EJERCICIO 6.- Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente.

El cuerpo de una víctima fue descubierto a las 11:00 a.m. El forense llegó a las 11:30 a.m. y encontró que la temperatura del cuerpo era de 94.6°F . La temperatura de la habitación era de 70°F . Una hora más tarde en la misma habitación, la temperatura del cadáver era de 93.4°F . Haciendo uso de la ley de enfriamiento de Newton, encontrar la hora de la muerte. Temperatura de una persona viva 98.6°F

EJERCICIO 7.- La ecuación diferencial usada para modelar la concentración de glucosa en la sangre en el tiempo t cuando es inyectada por vía intravenosa en el cuerpo viene dada por

$$y'(t) + ky(t) = \frac{G}{100V},$$

siendo $y(t)$ la concentración de glucosa, k una constante, G la tasa con la que la glucosa es admitida y V el volumen de sangre en el cuerpo. Demuestra que a largo plazo la cantidad de glucosa en la sangre se estabiliza.

EJERCICIO 8.- El fósforo radiactivo con una vida media de 14.2 días se utiliza como trazador en estudios bioquímicos. Después de un experimento con 8 gramos de fósforo los investigadores deben almacenar el material de manera segura hasta que sólo queden 10^{-3} gramos. Calcular el tiempo que deben almacenarse los recipientes.