Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
Modelos Matemáticos en Biología (3-Julio-07)

NOMBRE:.. ....

EJERCICIO 1. Las aceitunas de una región de Jaén se clasifican en buenas, regulares y malas. Se sabe que, año tras año, después de una cosecha buena las probabilidades de tener el año siguiente una buena cosecha, regular o mala son de 0, 0.8 y 0.2 respectivamente. Después de una cosecha regular, las probabilidades son 0.2, 0.6, 0.2 de que la siguiente cosecha sea buena, regular o mala. Por último, si la cosecha de este año es mala, existe un 10% de posibilidades de que la cosecha sea buena, un 80% de que sea regular y un 10% de que sea mala. Si la actual cosecha es mala,

1. ¿cuál es la probabilidad de que dentro de dos años la cosecha sea buena.?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que a "largo plazo" la cosecha sea mala?

EJERCICIO 2. La dinámica de una población viene determinada por la siguiente ecuación en diferencia,

$$y_{t+1} + a\, y_t = b\,; \quad t = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots \tag{1}$$

1. Encontrar los valores de a y b sabiendo que la solución general de la ecuación homogénea asociada a (1) es $y_t^h = k\, 0.5^t$, y una solución particular de (1) es $y_t^p = 4$.
2. Expresar la ecuación (1) como el sistema dinámica $y_{t+1} = f(y_t)$ para encontrar y clasificar sus puntos de equilibrio
3. Estudiar el comportamiento a largo plazo de la población haciendo uso del diagrama de Cobweb.

EJERCICIO 3. Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$2y_{t+2} - 3y_{t+1} + y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t. Si inicialmente la población era de 3 individuos y al año siguiente de 2, ¿cuál será la población cuatro años después del inicial?

EJERCICIO 4. Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 15 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 5 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50% de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25% de las medianas se hacen adultas.
El precio de venta de cada una de las clases es 10 euros las hembras jóvenes, 20 las

medianas y 30 las adultas. Si inicialmente disponemos de 1000 animales y cada 5 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?

EJERCICIO 5. Una persona tiene una población que crece con velocidad proporcional a la raíz cuadrada de lo que posee. Supongamos que hoy tiene 400 animales y que hace un año tenía 25 animales. ¿Cuántos animales tendrá dentro de 6 meses?

EJERCICIO 6. Una disolución salina que contiene 2kg de sal por litro fluye hacia el interior de un tanque que inicialmente se encuentra lleno con 500 litros de agua y 50kg de sal. La salmuera entra en el tanque a una velocidad de 5 litros por minuto y sale a la misma velocidad. Encontrar la concentración de sal en el tanque para un minuto cualquiera t. Supongamos ahora que el tanque estaba inicialmente vacío y que la disolución entra en el tanque a un ritmo de 5 litros por minuto y sale a una velocidad de 1 litro por minuto. Calcular la cantidad de sal en el tanque para un minuto cualquiera t.

EJERCICIO 7. La ecuación química para la reacción entre óxido nitroso y oxígeno para formar oxígeno y dióxido de nitrógeno a 25 grados centígrados obedece a la ley de acción de masas. Si $y(t)$ representa a la concentración de dióxido de nitrógeno, entonces,

$$y'(t) = k(a - y(t))^2 \left(b - \frac{y(t)}{2}\right) \tag{2}$$

siendo k una tasa constante positiva, a la cncentración inicial de óxido nitroso y b la concentración inicial de oxígeno.

Realizar un estudio cualitativo de (2) con $k = 0.00713$, $a = 4$ y $b = 1$, para conocer la concentración de dióxido de nitrógeno a "largo plazo".

EJERCICIO 8. A un paciente se le introduce por vía intravenosa una medicina a un ritmo constante de 12 miligramos por minuto, al mismo tiempo, el fármaco se descompone a una tasa proporcional a la cantidad que hay presente en cada momento.

- Encontrar la constante de proporcionalidad del modelo para que a largo plazo la cantidad de medicina en el cuerpo del paciente sea de 3 gramos.
- Con el valor de la constante encontrada en el apartado anterior, hallar la cantidad de medicina en el paciente al cabo de tres minutos sabiendo que inicialmente su cantidad era de 2 miligramos.