Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
8 Septiembre 2006

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- Cierta especie de aves se mueve entre tres asentamientos, A, B, y C, según la siguiente tabla de migraciones anuales:

	Pasan a A	Pasan a B	Pasan a C
Las aves de A	80%	10%	10%
Las aves de B	20%	70%	10%
Las aves de C	30%	10%	60%

1. ¿Qué **expresión matricial** proporcionará el número de aves en cada asentamiento después de k años?
2. Si inicialmente hay, en miles de aves, $A_0 = 2$, $B_0 = 3$ y $C_0 = 6$. Calcular el número de aves en cada asentamiento pasados dos años.
3. En general, el esquema marcado por la tabla anterior hace que el número de aves en cada asentamiento cambie de un año a otro ¿Existe alguna configuración inicial de aves que permanezca constante año tras año? Calcular los porcentajes y comprobar el resultado.

EJERCICIO 2.- Una población está dividida en tres clases de edades de dos años de duración: jóvenes , medianas y adultas. Una hembra joven aporta otra hembra y una mediana 24. Además, la cuarta parte de las jóvenes sobreviven para llegar a ser medianas y el 50% de las medianas se hacen adultas.

1. Analizando los elementos de la matriz de Leslie, contesta a las siguientes cuestiones: ¿Aumenta o disminuye la población? ¿Tiene la matriz un valor propio estrictamente dominante?
2. Si a largo plazo la población de hembras es de 7900, ¿Cuántas de ellas serán jóvenes?

EJERCICIO 3.- Dado el modelo discreto no lineal representado por la ecuación en diferencias:

$$N_{t+1} = \frac{e^r K N_t}{N_t(e^r - 1) + K}\,, \quad r > 0\,, \quad K > 0\,, \quad t = 0, 1, 2, \cdots\,,$$

1. Encontrar los puntos de equilibrio
2. Clasificar el punto de equilibrio no nulo.

EJERCICIO 4.- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población de conejos no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que mensualmente,

$$y_{t+2} - y_{t+1} = y_{t+1} - y_t + 12\,.$$

1. Interpretar la ecuación anterior desde un punto de vista biológico
2. Si inicialmente había 3 conejos, y al finalizar el primer mes la población era de 10 conejos, ¿Cuál será la población de conejos para un mes t cuaquiera?, ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?.

EJERCICIO 5.- Una población de bacterias $y(t)$ crece en función del tiempo, medido en horas, siguiendo la ley logística. Es conocido que, inicialmente, el número de individuos es 100, que el máximo que puede soportar el medio es 10^5 individuos y que al final de la primera hora la población alcanzó unos efectivos de 120.

Se desea conocer la población al cabo de las 4 horas y cuanto tiempo tendrá que transcurrir para que se alcance la mitad del número de individuos que forman la capacidad máxima.

EJERCICIO 6.- Un huevo duro se saca de una cacerola con agua caliente y se pone a enfriar en una mesa. Al principio, la temperatura del huevo es de 80 grados centígrados. Después de una hora es de 60 grados. Si la temperatura de la habitación es de 18 grados, ¿en qué momento tendrá el huevo una temperatura de 50 grados centígrados?.

EJERCICIO 7.- Una población de ciervos se modeliza a través de las siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'(t) = \alpha\, y(t)\, \ln\left(\frac{100}{y(t)}\right)\left(1 - \frac{y(t)}{10}\right), \quad \alpha > 0$$

donde $y(t)$ representa el tamaño de la población en el tiempo t. Hacer un estudio cualitativo de la ecuación diferencial anterior para determinar el comportamiento de la población a largo plazo, según diferentes valores iniciales.

EJERCICIO 8.- Un depósito de 50 litros contiene una solución compuesta por un 90% de agua y 10% de alcohol. Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda solución que contiene agua y alcohol a partes iguales, a un ritmo de 4 litros/minuto. Al mismo tiempo se vacía el tanque a una velocidad de 5 litros/minuto. Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, hallar el alcohol que queda en él después de 10 minutos.