Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(31-I-2005)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____________________

EJERCICIO 1.- Cierta planta da anualmente flores todas del mismo color, que puede ser blanco o rojo. Supongamos que tenemos 120 plantas y que el 25 % de las que dan flores blancas un año dan flores rojas en el año siguiente, mientras que el 40 % de las que dan flores rojas un año dan flores blancas en el siguiente.

1. Construir un modelo discreto matricial que describa como evoluciona el número de plantas con flores blancas $x_1(t)$ y rojas $x_2(t)$ en el tiempo t.
2. Calcular el número de plantas con flores blancas y amarillas a largo plazo.

EJERCICIO 2.- Dado el modelo discreto matricial de Leslie,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de α para los cuales la población a largo plazo desaparece, permanece constante y aumenta indefinidamente.
2. Hallar el valor de α para que la población crezca un 10 % anual. ¿Tienden las clases de edad, en este caso, hacia unas proporciones constantes?. En caso afirmativo, encontrarlas.

EJERCICIO 3.- Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra, una mediana tres, y una adulta dos. Además, el 75% de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 50% de las medianas se hacen adultas.

El precio de venta de una hembra joven es de 15 euros. Si disponemos de 170 animales y cada 6 años separamos la clase de menor edad, ¿cuál es el importe de la venta?.

EJERCICIO 4.- Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t. Sabemos que su evolución sigue una relación de la forma,

$$y_{t+2} + y_t = 1 + t\,.$$

Resolver la ecuación en diferencias anterior.

EJERCICIO 5.- Sea N_t el número de individuos de una población en el tiempo t. Si la evolución de N_t queda definida por la siguiente ecuación en diferencias

$$N_{t+1} = f(N_t) = \frac{1}{5}\left(N_t^2 - 2N_t + 2\right)$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo para discutir la evolución a largo plazo de la población según los distintos valores de N_0.

EJERCICIO 6.- Una sequía en un territorio causa la muerte de gran parte de la población animal. Una manada de animales sufre una tasa de muertes proporcional a su tamaño. El número de animales en la manada era de 500 al inicio de la sequía y solamente quedan 200 cuatro meses después. Encontrar una fórmula para calcular la población de la manada después de t meses. ¿Cuánto tiempo tardará en disminuir la manda a un décimo de su tamaño original?.

EJERCICIO 7.- La variación de temperatura de un cuerpo en contacto con el ambiente es, en cada instante, proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el ambiente.

Supongamos que encontramos el cadáver de un animal. En dicho momento, se toma la temperatura del mismo y resulta ser de 35^0C. Una hora después se vuelve a tomar la temperatura y ésta es de 34.5^0 C. Suponiendo constante la temperatura ambiente e igual a 27^0 C, se pide calcular a qué hora se produjo la muerte del animal, sabiendo que la temperatura del animal en vida es de 36.5^0 C.

EJERCICIO 8.- Un depósito contiene 500 litros de agua en los que están disueltos 125 gramos de sal. El depósito tiene dos válvulas de entrada y una de salida. Por una de ellas entra agua sin sal a una velocidad de 3 litros/minuto, por otra entra agua a una velocidad de 5 litros/minuto con una concentración de sal de 2 gramos/litro, y por la tercera sale la disolución salina a una velocidad de 6 litros/minuto. ¿Cuánta sal habrá en el depósito en un minuto cualquiera t?

EJERCICIO 9.- Dada la siguiente ecuación diferencial,

$$y'(t) = \left(y(t) - \frac{y^2(t)}{5} \right) (y(t) - 2)^2 \ ,$$

donde $y(t)$ representa el tamaño de cierta población en el tiempo t.

1. Encontrar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.
2. Discutir la evolución de la población según los diferentes valores de y_0.