Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(15-Septiembre-2005)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ____

EJERCICIO 1.- Un granjero tiene una población de flores cuyo color rojo, rosa y blanco viene determinado por los genotipos AA, Aa, aa respectivamente. El granjero decide fertilizar todas las flores con un color rosa.

1. Modeliza la situación anterior mediante una cadena de Markov
2. Comprueba que dicha cadena de Markov es regular
3. Aplica el resultado anterior para encontrar la distribución de colores a "largo plazo".

EJERCICIO 2.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ¿Es A una matriz de Leslie?. Justificar la respuesta e interpretar biológicamente los elementos de la matriz.
2. ¿Tiene la matriz A algún valor propio positivo estrictamente dominante? Justificar la respuesta
3. Sea el modelo matricial:
$$\vec{x}(t+1) = A\vec{x}(t)\,, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, ,\cdots .$$
Si $\vec{x}(0) = (100, 100, 100)^T$, ¿cuál será el valor de $\vec{x}(30)$?

EJERCICIO 3.-

1. Sea la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$, donde y_t representa a la cantidad de individuos en el año t. Si el número inicial de individuos es 2 y al cabo de un año es 5, ¿cuál será el valor de la población al cabo de 10 años?
2. Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 8$.

EJERCICIO 4.- Un modelo discreto frecuentemente utilizado para estudiar la dinámica de una población de insectos es:

$$x_{k+1} = x_k\, e^{r\left(1-\dfrac{x_k}{\alpha}\right)}\,, \quad r,\, \alpha \in \mathbb{R}^+\,, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \cdots \quad .$$

Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio no triviales.

EJERCICIO 5.- En un lago con una capacidad constante de 500000 m^3 entra y sale agua a una velocidad de 1000 m^3/día. El agua que entra tiene una concentración de contaminante de 0.03Kg/m^3.

1. Escribir una ecuación diferencial ordinaria que describa la evolución de la cantidad de contaminante en el lago

2. Hacer un estudio cualitativo de la ecuación diferencial anterior para calcular la cantidad de contaminante en el largo a largo plazo, ¿depende esta cantidad del valor inicial de contaminante en el lago?

3. Resolver la ecuación diferencial y comprobar que se obtiene el mismo resultado que en el apartado anterior.

EJERCICIO 6.- Los recursos de un determinado ecosistema sólo proporcionan alimentos para 6000 ciervos. La población en el año 1920 era de 1600 ciervos y en 1970 de 2400 ciervos.

1. ¿Cuál crees que es el modelo continuo de crecimiento de poblaciones más adecuado para modelizar la situación planteada?.

2. Haciendo uso del modelo anterior, calcular la población de ciervos en el año 2020.

EJERCICIO 7.- Sea $y(t)$ la población de truchas que hay en el trecho de un río correspondiente al tiempo t (medido en días). Sabemos que inicialmente hay 1000 truchas y que la población cambia con un ritmo que es proporcional al numero de truchas presentes en cada momento, siendo la constante de proporcionalidad 0.01. Además, cada día se incorporan 325 truchas y se pescan 125 truchas en esta zona del río. Construir un modelo continuo que represente a la situación anterior para conocer la población de truchas al cabo de un mes.

EJERCICIO 8.- Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por recursos. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. En concreto:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 2x - x^2 - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = 3y - y^2 - 2xy$$

1. Si inicialmente $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. ¿Crece la población $x(t)$?, ¿decrece la población $y(t)$?. Justifica la respuesta

2. A largo plazo, ¿pueden convivir ambas poblaciones?.