UNIVERSIDAD DE JAÉN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE:

EJERCICIO 1.- Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de 140 ratones en una caja dividida en tres departamentos comunicados entre de sí. Se sabe que cada semana,

- Ninguno de los ratones se quedan en el mismo departamento
- La mitad de los ratones del primer departamento pasan al tercero
- La tercera parte del segundo pasan al tercero
- La mitad de los ratones del tercer departamento pasan al primero

Construir un modelo discreto matricial que represente a la situación anterior y encontrar la distribución de los ratones "a largo plazo"

EJERCICIO 2.- Supongamos el modelo discreto matricial de Leslie,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

siendo la unidad de tiempo del sistema igual a un año.

1. Probar que para cualquier valor positivo de α la población siempre crece
2. Encontrar el valor de α para que cada año la población crezca un 50 %
3. Para el valor de α anteriormente encontrado, ¿cuál será el precio de la venta, en el caso particular de la separación uniforme, si disponemos inicialmente de 530 hembras y el precio de venta es 10 euros para la primera clase, 15 euros para las medianas y 5 euros para las hembras de mayor edad?

EJERCICIO 3.- En un determinado ecosistema y supuesto que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento, se observa que,

$$(y_{t+2} - y_{t+1}) - \frac{1}{3}(y_{t+1} - y_t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

siendo y_t el número de individuos en el tiempo t.

1. Explicar el significado "biológico" de la ecuación anterior
2. ¿Desaparecerá la población a largo plazo?

EJERCICIO 4.- Muchas poblaciones de insectos se rigen por el siguiente modelo

$$N_{t+1} = \left(\frac{1}{\alpha} N_t^{-b}\right) . \, (\lambda N_t) \ ,$$

donde λ representa a la tasa reproductiva ($\lambda > 1$) y N_t^{-b}/α es la fracción de la población que sobreviven desde la infancia a la edad adulta reproductiva. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del modelo

EJERCICIO 5.- Entre los alumnos de una asignatura se extiende el rumor de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 1000 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído. Construir una fórmula y aplicarla para conocer cuantos días tardarán en saberlo 950 alumnos, sabiendo que en el primer día lo conocían 10 alumnos y a los 2 días 100 alumnos.

EJERCICIO 6.- En la ecuación logística, supongamos que la capacidad de carga es $K = 10^5$, la población inicial es de 100 bacterias y que al cabo de l día la población es de 120, calcular el momento (en días) en el que la población de bacterias crece con más rapidez.

EJERCICIO 7.- El modelo

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.1 y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{100}\right) \left(\frac{y(t)}{5} - 1\right) \ ,$$

ha sido propuesto como un modelo alternativo al logístico. Si inicialmente el número de individuos es de 3 ¿cómo se comporta la población a largo plazo?. ¿Y si el número inicial de individuos es de 50?. Justificar las respuestas.

EJERCICIO 8.- En un acuario disponemos de dos poblaciones de peces que compiten entre si, siendo $x(t)$, $y(t)$ sus poblaciones en el tiempo t. La dinámica de su comportamiento viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) - 0.5x^2(t) - 0.2x(t)y(t) \\ y'(t) = 1.2y(t) - 0.4y^2(t) - 0.3x(t)y(t) \end{array} \right.$$

Inicialmente sabemos que las poblaciones son $x(0) = 2$, $y(0) = 1$. ¿En estos momentos iniciales, ¿cómo evolucionan las poblaciones?. ¿Cuál será el comportamiento a largo plazo de dichas poblaciones?.