

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1.-** Una sala de cine decide programar las películas según el siguiente método: si una semana se proyectó una norteamericana, a la semana siguiente se programará, dos de cada tres veces, una española, y una de cada tres veces, una francesa. Si la película programada fue francesa, dos de cada tres veces será norteamericana y una de cada tres francesa. Finalmente, si la película programada fue española, la semana siguiente se programará española una de cada tres veces y norteamericana dos de cada tres veces. Si inicialmente las cuotas de pantalla son el 50 % para el cine norteamericano, el 35% para el cine español, y el 15 % para el francés.

1. ¿Estamos ante una cadena de Markov regular?. Justifica la respuesta.
2. Comprueba que la matriz que representa al modelo tiene a  $\lambda = 1$  como valor propio.
3. Analiza el comportamiento a largo plazo del modelo para contestar a la siguiente cuestión. Después de seguir este esquema durante un “largo plazo”, ¿se habrá cumplido con la cuota de pantalla que exige programar al mes el 25 % de películas de producción nacional?

**EJERCICIO 2.-** Una población comienza con 100 hembras de edad cero. Supongamos que cada hembra de edad cero produce una cría y que las  $2/3$  partes sobreviven a la edad uno. Cada hembra de la edad uno tiene tres crías y entonces muere.

1. ¿Cuál será la población después de tres generaciones?
2. Encuentra el modelo de Leslie y determina cuál será el comportamiento de la población a “largo plazo”.

**EJERCICIO 3.-** La siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{t+1} = \frac{\alpha x_t}{1 + \beta x_t}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x_t \geq 0,$$

fue propuesta por *Kaplan & Glais* en 1995 y juega un papel muy importante en análisis de modelos no lineales genéticos y en redes neuronales.

1. Encontrar y analizar los puntos de equilibrio
2. Sea  $\alpha = \beta = 1$ . Dibujar de forma aproximada el diagrama en telaraña (cobweb) tomando como semilla  $x_0 = 4$ .

**EJERCICIO 4.-** Si sobre una población no influyen factores que modifiquen el crecimiento, se observa que,

$$y_{t+1} - y_t = t, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

siendo  $y_t$  el número de individuos en el tiempo  $t$ .

1. Explicar el significado “biológico” de la ecuación anterior
2. Resuelve la ecuación en diferencias anterior.

**EJERCICIO 5.-** Los restos de un humanoide han sido encontrados en una caverna junto con los restos de un campamento. Los arqueólogos creen que la edad de los restos del humanoide es la misma que la del campamento. Se determina que sólo queda el 2 % de la cantidad original de carbono-14 en la madera quemada del campamento.

1. Encuentra y resuelve la ecuación diferencial del modelo de desintegración radiactiva
2. Estimar la edad de los restos del humanoide sabiendo que la vida media del carbono-14 es de 5600 años.

**EJERCICIO 6.-** Entre los asistentes a un zoo se extiende cierto rumor en relación al trato que reciben los animales. Si hay 500 personas y el rumor se extiende de manera proporcional al número de personas que todavía no lo han oído, siendo 0.25 la constante de proporcionalidad. ¿Cuántos días tardarán en saberlo 450 personas, si inicialmente lo conocían 5 personas?

**EJERCICIO 7.-** Una población de ciervos se modeliza a través de las siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'(t) = 1.2y(t) \ln\left(\frac{100}{y(t)}\right),$$

donde  $y(t)$  representa el tamaño de la población en el tiempo  $t$ . Hacer un estudio cualitativo de la ecuación diferencial anterior para determinar el comportamiento de la población a largo plazo, según los siguientes valores iniciales

$$y(0) = 50 \text{ ciervos}, \quad y(0) = 100 \text{ ciervos}, \quad y(0) = 150 \text{ ciervos}$$

**EJERCICIO 8.-** Un depósito contiene inicialmente 15 kilos de sal disuelta en 200 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito por un primer grifo agua pura a una velocidad de 2 litros/minuto, por un segundo grifo a 4 litros/minuto salmuera que contiene 0.25 kilos de sal por litro, y por un tercer grifo a 3 litros/minuto salmura que contiene 0.5 kilos de sal por litro. Simultáneamente, se sacan del depósito 10 litros/minuto de la mezcla resultante. Plantea y resuelve la ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada.