

NOMBRE: \_\_\_\_\_

**CUESTIÓN 1.-** En un determinado ecosistema, sabemos que sobre una población no influyen factores que modifiquen su crecimiento. Si  $y_t$  representa el número de individuos en el año  $t$ , se conoce que año tras año se cumple:

$$(y_{t+2} - y_{t+1}) - \frac{1}{2}(y_{t+1} - y_t) = 20, \quad t = 0, 1, 2 \dots \quad (1)$$

Se pide:

1. Explicar el significado “biológico” de la ecuación en diferencias (1)
2. Encontrar el número de individuos de la población al cabo de 20 años, sabiendo que  $y_0 = 3, y_1 = 42$

**CUESTIÓN 2.-** Ante el buen resultado de sus empresas, el señor Pérez piensa acometer un ambicioso proyecto de inversiones que comprende la adquisición de la multinacional de comidas de animales UNIVAC, la cual en la actualidad únicamente disfruta del 25 % de cuota de mercado, estando el 75 % restante ocupado por la multinacional MARKETS.

Para asegurarse de conseguir el 50% en ambas empresas, realiza un estudio de mercado, obteniéndose las siguientes conclusiones:

- La evolución dinámica en el tiempo está caracterizada por un proceso de Markov.
- Como consecuencia del cambio cualitativo de gestión, a UNIVAC se le supone con capacidad para retener anualmente el 72 % de la cuota de mercado del año anterior, perdiendo únicamente el 28 % restante en favor de MARKET, la cual a su vez retendrá un 58 % de la cuota del año anterior.

Se pide:

1. ¿Se trata de una cadena de Markov regular?
2. ¿Qué cuota de mercado alcanzará UNIVAC después de un año de gestión del nuevo equipo directivo?
3. Si se contempla un horizonte temporal a largo plazo, ¿qué cuota de mercado será capaz de abarcar?

**CUESTIÓN 3.-** Algunas poblaciones de animales se rigen por el siguiente modelo

$$f(N_t) = N_{t+1} = N_t \left[ 1 + r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right], \quad r, K, > 0, \quad t = 0, 1, 2 \dots$$

Encontrar los puntos de equilibrio del modelo y clasificarlos.

**CUESTIÓN 4.-** Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edades. En cada período el 50 % de la primera clase pasa a la segunda. El número medio

de crías hembras de las de la primera clase es de 1 y de las de la segunda 1.5. Se sabe que después de haber transcurrido un número muy elevado de períodos el total de hembras es de 4000. ¿Cuántas de ellas serán adultas (estarán en la segunda clase)?

**CUESTIÓN 5.-** Los árboles de un bosque están divididos en tres clases de altura. En cada temporada de corte los  $\frac{4}{5}$  de los árboles de la primera clase pasan a la segunda. El precio de los árboles de la segunda clase es de 10 euros, y 20 euros para los de la tercera. ¿A partir de qué porcentaje de los árboles que pasan de la segunda a la tercera clase, será más rentable cortar todos los de la tercera clase?.

**CUESTIÓN 6.-** Amplias investigaciones han suministrado datos que relacionan el riesgo  $R$  (en porcentaje) de tener un accidente automovilístico con el nivel  $b$  de alcohol en la sangre (en porcentaje). Se conocen dos puntos representativos  $R(0) = 1\%$  y  $R(0.14) = 20\%$ . Si suponemos que la razón de cambio del riesgo respecto al nivel de alcohol en la sangre viene dada por  $R'(b) = kR(b)$ :

1. Resuelve la ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada.
2. ¿En qué nivel de alcohol en la sangre el riesgo de sufrir un accidente es del 100%.

**CUESTIÓN 7.-** Las firmas farmacéuticas invierten mucho dinero con el fin de probar un nuevo medicamento. Sin embargo, lleva tiempo que los médicos acepten y hagan uso del medicamento. El uso tiende a un valor límite del 100 % o 1, después del tiempo  $t$ , en meses. Sea  $P(t)$  el porcentaje de médicos que utilizan un nuevo medicamento contra el cancer después de  $t$  meses. Es conocido que la razón de cambio de éste porcentaje es proporcional a la diferencia entre dicho porcentaje y su valor límite.

1. Si  $P(0) = 0$ , encontrar el porcentaje de médicos que aceptan el medicamento después de 3 meses, sabiendo que después de 1 mes el porcentaje es del 33 %.
2. Trazar una gráfica aproximada de la función  $P(t)$ .

**CUESTIÓN 8.-** Un tanque de salmuera contiene 60 kilos de sal disuelta en 1000 litros de agua. Se introduce en el tanque, a una velocidad de 20 litros por minuto, agua salada que contiene 1 kilo del sal por cada 10 litros de agua. La mezcla, conservada homogénea mediante agitación, sale a una velocidad de 30 litros por minuto. Hallar la cantidad de sal en el tanque al cabo de 1 hora.

**CUESTIÓN 9.-** Existen poblaciones tales que si el número de individuos es elevado, entonces la tasa de crecimiento decrece. Además, si la población es demasiado pequeña esta tasa también decrece. Un modelo que tiene en cuenta las observaciones anteriores es el siguiente:

$$y' = -0.0001y(y^2 - 101y + 100)$$

Realizar un estudio cualitativo para predecir el comportamiento a largo plazo de la población  $y(t)$  según distintos valores iniciales  $y(0)$ .

**CUESTIÓN 10.-**

1. Estudio cualitativo del modelo presa-depredador
2. Demostrar, que en el modelo presa-depredador un nivel moderado de pesca incrementa, en promedio, la cantidad de peces comestibles y disminuye la de los tiburones.