Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(21-XII-2004)

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA

NOMBRE: ______________________________

EJERCICIO 1.- El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 habitantes, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo?, ¿Y dentro de 3 meses? ¿Qué pasará a largo plazo, suponiendo que no cambia la matriz de transición?.

EJERCICIO 2.- Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra, una mediana tres, y una adulta dos. Además, el 75% de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 50% de las medianas se hacen adultas.

El precio de venta de una hembra joven es de 15 euros. Si disponemos de 170 animales y cada 6 años separamos la clase de menor edad, ¿cuál es el importe de la venta?.

EJERCICIO 3.- Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto:

$$x_{t+1} = \frac{kx_t}{a + x_t}\,, \quad k > a > 0\,,$$

donde x_t representa al número de individuos de una población en el tiempo t. ¿Cuál será el comportamiento de la población a largo plazo, si $k = 30$, $a = 10$ y $x_0 = 15$ individuos?

EJERCICIO 4.- Supongamos que si no intervienen factores externos, **el incremento** del número de conejos en un mes es la tres cuartas partes del incremento del mes anterior. Inicialmente el número de conejos es de 10 y al finalizar el primer mes es de 30, además cada mes se incorporan 25 conejos a la población. Determinar la población de conejos al finalizar un mes cualquiera. ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?.

EJERCICIO 5.- El ritmo al que cierto medicamento se absorbe en el sistema circulatorio está dado por $dy/dt = 2 - 0.25y$, donde $y(t)$ es la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en el tiempo t. Supongamos que al comienzo no había indicios del medicamento en la sangre. Resolver la ecuación diferencial para encontrar lo que le sucede a $y(t)$ a "largo plazo". Comprobar que el resultado es cierto haciendo un análisis cualitativo del modelo.

EJERCICIO 6 Una epidemia se desarrolla en una población de una forma tal que, en cada momento del tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas enfermas por el número de personas sanas. Si la población tiene 10000 habitantes, y se sabe que el número de personas infectadas inicialmente era de 50 junto con que al cabo de 3 días había 250 enfermos. Averiguar el número de enfermos que habrá al cabo de doce días.

EJERCICIO 7.- Un depósito contiene inicialmente 20 kilos de sal disuelta en 500 litros de agua. Supongamos que se comienza a introducir en el depósito 12 litros/minuto de salmunera (disolución que contiene 0.25 kilos de sal por litro), y que, simultáneamente, se sacan del depósito 8 litros/minuto en la mezcla resultante ¿Qué cantidad de sal habrá en el depósito al cabo de una hora?

EJERCICIO 8.- Sea el modelo,

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 0.2x(t) - 0.05x(t)y(t) \\ y'(t) = -0.1y(t) + 0.2x(t)y(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $y(t)$ representa a una población de peces y $x(t)$ a otra población diferente de peces.

1. Explicar el significado "biológico" de las ecuaciones (1).

2. Realizar el estudio cualitativo de (1), para analizar el comportamiento "a largo plazo" de ambas poblaciones.