

NOMBRE: _____

CUESTIÓN I.- Para beber agua un animal puede ir a un lago o a un río. Se sabe que no va al lago dos días seguidos y que si toma agua en el río la probabilidad de que al día siguiente beba agua en cada uno de los sitios es la misma.

1. Si el proceso está regulado por una cadena de Markov, ¿es regular?
2. Si hoy el animal bebe agua en el lago, ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días beba de nuevo agua del lago?
3. ¿Qué puedes comentar de su comportamiento a largo plazo?

CUESTIÓN II.- Supongamos un animal que sólo vive tres años y se propaga en su tercer año. Hacemos tres clases de edades y sabemos que: la probabilidad de supervivencia de las hembras del primer grupo es del 50 % y las del segundo 1/3, además en el tercer grupo el promedio de hembras que nacen por cada hembra es de 6.

1. Si inicialmente hay 5 hembras en cada clase de edad. Estudiar la evolución de la población.
2. Si modificamos la situación anterior suponiendo que además de las hipótesis anteriores en la segunda clase el promedio de hembras que nacen por cada hembra es de 4. Estudiar la evolución de la población.

CUESTIÓN III.- Sea y_t el número de individuos de una determinada especie de animales en el tiempo t . Sabiendo que su evolución sigue una relación de la forma:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = \frac{1}{2}(y_{t+1} - y_t) + 2^{-t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

probar que la población se estabiliza a largo plazo.

CUESTIÓN IV.- y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$,

$$f(N_t) = N_{t+1} = \alpha N_t e^{-\beta N_t}, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

CUESTIÓN V.- Aplicación del modelo de Leslie: Explotación racional y duradera de una población de animales.

CUESTIÓN VI.- Es sabido que una sustancia radiactiva presente en ciertos fósiles, tal como el C^{14} , se desintegra en cada momento, a una velocidad proporcional a la cantidad presente. La “vida media” del C^{14} es de 5750 años.

1. Resolver la ecuación diferencial que modela a la situación planteada
2. Averiguar la edad de un fósil sabiendo que contiene el 77.7 % de su C^{14} inicial.

CUESTIÓN VII.- Una epidemia se desarrolla en una población de una forma tal que, en cada momento del tiempo, la velocidad de desarrollo de la infección es directamente proporcional al número de personas enfermas por el número de personas sanas. Si la población tiene 1000 habitantes, y se sabe que el número de personas infectadas inicialmente era de 50 junto con que al cabo de 3 días había 250 enfermos. Se pide:

1. Encontrar y resolver la ecuación diferencial que modeliza la situación planteada
2. Averiguar el número de enfermos que habrá al cabo de doce días.

CUESTIÓN VIII.- Se bombea cerveza con un contenido de 6% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 400 galones de cerveza con 3% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior con una rapidez de 3 galones/minuto, en tanto que el líquido mezclado se extrae con una rapidez de 4 galones/minuto. Obtener el número $y(t)$ de galones de alcohol que hay en el tanque en un instante t cualquiera. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de 60 minutos?

CUESTIÓN IX.- Supongamos el siguiente modelo para una población de peces con sobrepoblación y captura,

$$y'(t) = y(t) - \frac{1}{9}y(t)^2 - \frac{8}{9},$$

siendo $y(t)$ la población de peces en el tiempo t .

1. ¿Cuál es la tasa de captura?. ¿Cuál es la tasa de sobrepoblación?. Justifica las respuestas.
2. Realizar un estudio cualitativo para interpretar el comportamiento futuro de la población de peces.

CUESTIÓN X.- Sean $x(t)$ $y(t)$ las poblaciones de dos especies que compiten por los recursos disponibles. El modelo que representa a estas dos poblaciones en competencia es:

$$\begin{cases} x'(t) = (4 - 2x(t))x(t) + x(t)y(t) \\ y'(t) = (4 - 2y(t))y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

Realizar un estudio cualitativo del modelo para estudiar el comportamiento a largo plazo de las poblaciones.