

EXAMEN TEÓRICO DE MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA (16-12-03)

NOMBRE: \_\_\_\_\_

**EJERCICIO 1.-** Supongamos que la edad máxima alcanzada por las hembras de una población animal es de 18 años y que esta población se divide en tres clases de edades iguales con intervalos de 6 años, a las que llamaremos jóvenes, medianas y adultas. La matriz de crecimiento de *Leslie* viene definida de la siguiente manera: una hembra joven aporta otra hembra y una mediana dos, además el 50% de las jóvenes sobreviven para llegar a medianas y el 25% de las medianas se hacen adultas.

El precio de venta de cada una de las clases es 15 euros las hembras jóvenes, 25 las medianas y 32 las adultas. Si disponemos de 1000 animales y cada 6 años separamos la misma fracción de cada una de las clases, ¿cuál es el importe de la venta?.

**EJERCICIO 2.-**

1. Encontrar y clasificar los puntos de equilibrio del siguiente modelo discreto:

$$x_{t+1} = \beta x_t e^{-\alpha x_t}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $x_t$  representa al número de individuos de una población en el tiempo  $t$ .

2. El crecimiento de una especie viene descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 2(y_{t+1} - y_t) + 8, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde  $y_t$  representa a la cantidad de animales en el año  $t$ . Determinar el número de animales al finalizar un año cualquiera "t", sabiendo que inicialmente hay 15 y que transcurrido un año su número es de 19. ¿Cuál será su comportamiento a largo plazo?.

**EJERCICIO 3.-** Una infección común en el tracto urinario en los humanos es producido por la bacteria *Escherichia coli*. Generalmente la infección se hace patente cuando la colonia de bacterias alcanza una población alrededor de  $10^8$ . La colonia duplica su tamaño cada 20 minutos. Cuando se vacía una vejiga llena (alrededor de un litro) se elimina alrededor del 90 % de las bacterias. Supongamos que al inicio de cierto período de tiempo, la vejiga y tracto urinario de una persona contiene  $10^8$  bacterias de *E. coli*. Durante un intervalo de T minutos la persona ingiere suficiente líquido para llenar la vejiga. Encontrar el valor de T tal que si se vacía la vejiga después de T minutos, alrededor de  $10^8$  bacterias permanecerán dentro del organismo.

**EJERCICIO 4.-**Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura  $T$  del cuerpo y la temperatura  $T_0$  del aire.

1. Escribir una ecuación diferencial que represente a la situación anterior
2. Realizar el estudio cualitativo de la ecuación diferencial anterior.
3. Al sacar un pastel de un horno su temperatura es de  $148^0$  C. tres minutos después, su temperatura es de  $93^0$  C. ¿ Cuánto tardará en enfriarse hasta una temperatura de  $25^0$  C sabiendo que la temperatura ambiente es  $21^0$  C?.
4. Suponiendo que la constante de proporcionalidad es -0.2, la temperatura ambiente  $21^0$  C, y la temperatura a los tres minutos es de  $93^0$  C. Aplicando el método de Euler con un paso  $h = 0.5$ , encontrar una solución aproximada de la temperatura del cuerpo a los 4 minutos y medio.