UNIDAD I

INTRODUCCIÓN
A LOS
CIRCUITOS LÓGICOS

1. ÁLGEBRA DE BOOLE
2. MÉTODO DE REDUCCIÓN DE MAPAS DE KARNAUGH

1. ÁLGEBRA DE BOOLE

El **álgebra de Boole** se llama así debido a George Boole, quien la desarrolló a mediados del siglo XIX. El álgebra de Boole denominada también álgebra de la lógica, permite prescindir de la intuición y simplificar deductivamente afirmaciones lógicas que son todavía más complejas.

El objetivo principal de este capítulo es llegar a manejar los postulados y teoremas del álgebra de Boole como herramienta básica en el análisis y síntesis de circuitos digitales.

1.1. DEFINICIONES.

El sistema matemático denominado **álgebra Booleana**, es un método simbólico de estudiar relaciones lógicas, el cual se desarrolla en tres partes:

1. Se establecen los **conceptos fundamentales** (símbolos o términos no definidos).

2. Se define un **conjunto de postulados** que formen la base del álgebra.

3. Se constituyen los **teoremas fundamentale**s del álgebra a partir de los postulados.

A su vez, las exigencias y condiciones que deben reunir los postulados son:

1. Los postulados deben ser **coherentes** o **consistentes** para que un álgebra definida pueda desarrollarse por deducciones lógicas. En caso contrario, el sistema resultaría contradictorio.

2. Los postulados deben ser **independientes**; es decir, irreductibles recíprocamente (libre de reducciones).

3. Los postulados deben ser tan **simples** en su enunciado como sea posible; es decir, no separables en dos o más partes.

1.2. POSTULADOS.

En base a los elementos primitivos establecidos anteriormente, se formulan los siguientes **postulados** (axiomas), que por definición no requieren de demostración.

P.1. Existe un conjunto ***M*** de elementos sujetos a una relación de equivalencia, denotada por el signo **=** que satisfacen el **principio de sustitución**.

P.2.a. Para toda $(A , B) \in M$, **A + B** es una operación binaria denotada por el signo **+**, tal que $(A + B) \in M$.

P.2.b. Para toda $(A , B) \in M$, $A \cdot B$ es una operación binaria denotada por el signo $\cdot$, tal que $(A \cdot B) \in M$.

P.3.a. Existe un elemento ***0*** en ***M***, tal que **A + 0 = A** para toda $A \in M$.

P.3.b. Existe un elemento **1** en ***M***, tal que $A \cdot 1 = A$ para toda $A \in M$.

P.4.a. Para toda **(*A* , *B*)** 0 ***M***; **A + B = B + A**

P.4.b. Para toda **(*A* , *B*)** 0 ***M***; **A C B = B C A**

P.5.a. Para toda **(*A*, *B*, *C*)** 0 ***M***; **A + (B C C) = (A + B) C (A + C)**

P.5.b. Para toda **(*A*, *B*, *C*)** 0 ***M***; **A C (B + C) = (A C B) + (A C C)**

P.6.a. Para todo elemento ***A*** 0 ***M***, existe un elemento $\bar{A}$, tal que:

$$A + \bar{A} = 1$$

P.6.b. Para todo elemento ***A*** 0 ***M***, existe un elemento $\bar{A}$, tal que:

$$A \bullet \bar{A} = 0$$

P.7. Existen por lo menos **(*A* , *B*)** 0 ***M***, tal que:

$$A \neq B$$

Se habrá observado cierta similitud entre estos postulados y los del álgebra ordinaria. Nótese sin embargo, que la primera ley distributiva **P.5.a.** no es válida en el álgebra ordinaria y que tampoco existe ningún elemento $\bar{A}$ en dicha álgebra.

También se notará que los postulados de *Huntington* se presentaron por pares. Una observación más detenida, muestra que existe una dualidad entre **+** y C, lo mismo que entre **1** y **0**. Si el símbolo **+** se substituye por C y C por **+**, así como todos los **1** se sustituyen por **0** y todos los **0** por **1** en cualquiera de los postulados de cada par, el resultado es el otro postulado. A causa de esta dualidad fundamental, cada teorema que se presenta tendrá su dual que se obtendrá efectuando la sustitución mencionada; por tanto, la demostración de un teorema implica la validez de su teorema dual.

1.3. TEOREMAS FUNDAMENTALES.

A continuación se presentan los principales teoremas del álgebra de Boole, los cuales son la base del trabajo subsecuente. Con lo visto hasta aquí es posible demostrar dichos teoremas por cualesquiera de los siguientes métodos.

1. *Demostración algebraica* (empleando postulados y teoremas ya demostrados).

2. *Gráficamente* (por medio de los diagramas de Euler-Venn).

3. *Por inducción perfecta* (empleando tablas de verdad).

Aquí se empleará el método algebraico pues se considera la mejor manera de iniciarse en esta álgebra, además de que sólo se demostrarán los teoremas primales, pero aplicando las reglas de dualidad mencionadas anteriormente, se podrá obtener la parte dual.

T.1. TEOREMAS SOBRE LA UNICIDAD.

1.a. EL ELEMENTO **0** ES ÚNICO.

1.b. EL ELEMENTO **1** ES ÚNICO.

DEMOSTRACIÓN DE 1.a.

Por contradicción, supóngase que **0** y $\mathbf{0_1}$ son neutros aditivos:

$$\boldsymbol{A + 0 = A} \quad y \quad \boldsymbol{A_1 + 0_1 = A_1} \qquad \textit{(P.3.a.)}$$

Si

$$A_1 = 0$$

$$A = 0_1$$

Si **0** es neutro, entonces:

$$\mathbf{0_1 + 0 = 0} \qquad \textit{(1)}$$

Si $\mathbf{0_1}$ es neutro, entonces:

$$\mathbf{0 + 0_1 = 0} \qquad \textit{(2)}$$

De ***(1)*** y ***(2)*** se obtiene:

$$\mathbf{0_1 = 0}$$

ESTO DEMUESTRA EL TEOREMA

T.2. *TEOREMAS SOBRE LA EQUIPOTENCIA.*

2.*a*. $\boldsymbol{A + A = A}$

2.*b*. $\boldsymbol{A \bullet A = A}$

DEMOSTRACIÓN DE 2.a.

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = (A + A) \bullet 1 =$ *(P.3.b.)*

$= (A + A) \bullet (A + \overline{A}) =$ *(P.6.a.)*

$= A + (A \bullet \overline{A}) =$ *(P.5.a.)*

$= A + 0$ *(P.6.b.)*

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ *(P.3.a.)*

T.3.

3.*a*. $\boldsymbol{A} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$

3.*b*. $\boldsymbol{A} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}$

DEMOSTRACIÓN DE 3.a.

$\boldsymbol{A} + \mathbf{1} = 1 \bullet (A + 1) =$ *(P.3.b.)*

$= (A + \overline{A}) \bullet (A + 1) =$ *(P.6.a.)*

$= A + (\overline{A} \bullet 1) =$ *(P.5.a.)*

$= A + \overline{A}$ *(P.3.b.)*

$\boldsymbol{A} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$ *(P.6.a.)*

T.4. *TEOREMAS DE LA ABSORCIÓN.*

4.*a*. $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$

4.*b*. $\boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$

DEMOSTRACIÓN DE 4.a.

$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) = (A \bullet 1) + (A \bullet B) =$ *(P.3.b.)*

$= A \bullet (1 + B) =$ *(P.5.b.)*

$= A \bullet 1$ *(T.3.a.)*

$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$ *(P.3.b.)*

T.5. *EL ELEMENTO $\overline{A}$ ES ÚNICO.*

DEMOSTRACIÓN

Por contradicción, supóngase que existen dos elementos distintos $\overline{A_1}$ *y* $\overline{A_2}$, tales que:

$\boldsymbol{A + \overline{A_1} = 1}$ *y* $\boldsymbol{A + \overline{A_2} = 1}$ ***(P.6.a.) Por suposición***

$\boldsymbol{A \bullet \overline{A_1} = 0}$ *y* $\boldsymbol{A \bullet \overline{A_2} = 0}$ ***(P.6.b.) Por suposición***

Entonces:

$\overline{A_2} = 1 \bullet \overline{A_2} =$ ***(P.3.b.)***

$= (A + \overline{A_1}) \bullet \overline{A_2} =$ ***Por suposición***

$= (A \bullet \overline{A_2}) + (\overline{A_1} \bullet \overline{A_2}) =$ ***(P.5.b.)***

$= 0 + (\overline{A_1} \bullet \overline{A_2}) =$ ***Por suposición***

$= (A \bullet \overline{A_1}) + (\overline{A_1} \bullet \overline{A_2}) =$ ***Por suposición***

$= (A + \overline{A_2}) \bullet \overline{A_1} =$ ***(P.5.b.)***

$= 1 \bullet \overline{A_1}$ ***Por suposición***

$\overline{A_2} = \overline{A_1}$ ***(P.b.3.)***

T.6. PARA TODA $\boldsymbol{A \in M}$, $\boldsymbol{A = \overline{\overline{A}}}$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\overline{\overline{A}} = X$, por tanto:

$\overline{A} + X = 1;\ \overline{A} \bullet X = 0$ ***(P.6.)***

Pero:

$\overline{A} + A = 1;\ \overline{A} \bullet A = 0$ ***(P.6.)***

Así que tanto **X** como $\overline{A}$ satisfacen el postulado **P.6.** como el complemento de **A**, por tanto:

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$, *es decir*, $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$

T.7.

7.*a*. $\boldsymbol{A \bullet [(A + B) + C] = [(A + B) + C] \bullet A = A}$

7.*b*. $\boldsymbol{A + [(A \bullet B) \bullet C] = [(A \bullet B) \bullet C] + A = A}$

DEMOSTRACIÓN DE 7.a.

$\boldsymbol{A \bullet [(A + B) + C]} = A \bullet (A + B) + (A \bullet C) =$ ***(P.5.b.)***

$= (A \bullet A) + (A \bullet B) + (A \bullet C) =$ ***(P.5.b.)***

$= A + (A \bullet B) + (A \bullet C) =$ ***(T.2.)***

$= A \bullet (1 + B + C) =$ ***(P.5.b.)***

$= A \bullet 1$ ***(T.3.)***

$\boldsymbol{A \bullet [(A + B) + C] = A}$ ***(P.3.b.)***

T.8. ***TEOREMAS SOBRE LA ASOCIACIÓN.***

8.*a*. $\boldsymbol{A + (B + C) = (A + B) + C}$

8.*b*. $\boldsymbol{A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C}$

DEMOSTRACIÓN DE 8.a.

Sea:

$\boldsymbol{Z} = [(A + B) + C] \bullet [A + (B + C)] =$

$= \{A \bullet [(A + B) + C\} + \{(B + C) \bullet [(A + B) + C]\} =$ ***(P.5.b.)***

$= A + \{(B + C) \bullet [(A + B) + C]\} =$ ***(T.7.)***

$= A + \{B \bullet [(A + B) + C] + C \bullet [(A + B) + C]\} =$ ***(P.5.b.)***

$= A + \{B + C \bullet [(A + B) + C]\} =$ ***(T.7.)***

(1) $\boldsymbol{Z = A + (B + C)}$ ***(T.7.)***

Como:

$$\boldsymbol{Z} = [(A+B)+C]\bullet[A+(B+C)] =$$

$$= \{(A+B)\bullet[A+(B+C)]\}+\{C\bullet[A+(B+C)]\} = \qquad \textit{\textbf{(P.5.b.)}}$$

$$= \{(A+B)\bullet[A+(B+C)]\}+C = \qquad \textit{\textbf{(T.7.)}}$$

$$= \{A\bullet[A+(B+C)]+B\bullet[A+(B+C)]\}+C =$$

$$= \{A\bullet[A+(B+C)]+B\}+C \qquad \textit{\textbf{(T.7.)}}$$

(2) $$\boldsymbol{Z = (A+B)+C} \qquad \textit{\textbf{(T.7.)}}$$

Por consiguiente de **(1)** y **(2)** y por transitividad:

$$\boldsymbol{Z = A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C}$$

T.9. *TEOREMAS SOBRE LA COMPLEMENTACIÓN.*

9.*a.* $\boldsymbol{A + (\overline{A} \bullet B) = A + B}$

9.*b.* $\boldsymbol{A \bullet (\overline{A} + B) = A \bullet B}$

DEMOSTRACIÓN DE 9.a.

$$\boldsymbol{A + (\overline{A} \bullet B)} = (A + \overline{A}) \bullet (A + B) = \qquad \textit{\textbf{(P.5.a.)}}$$

$$= 1 \bullet (A + B) \qquad \textit{\textbf{(P.6.a.)}}$$

$$\boldsymbol{A + (\overline{A} \bullet B) = A + B} \qquad \textit{\textbf{(P.3.b.)}}$$

T.10. *TEOREMAS DE DeMORGAN.*

10.*a.* $\boldsymbol{\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}}$

10.*b.* $\boldsymbol{\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}}$

DEMOSTRACIÓN DE 10.a.

PRIMERA PARTE.

$$\boldsymbol{(A+B)+(\overline{A}\bullet\overline{B})} = [(A+B)+\overline{A}]\bullet[(A+B)+\overline{B}] = \qquad \textit{\textbf{(P.5.a.)}}$$

$$= [\overline{A} + (A + B)] \bullet [(A + B) + \overline{B}] = \qquad \textbf{(P.4.a.)}$$

$$= [(\overline{A} + A) + B] \bullet [A + (B + \overline{B})] = \qquad \textbf{(T.8.)}$$

$$= (1 + B) \bullet (A + 1) = \qquad \textbf{(P.6.a.)}$$

$$= \mathbf{1 \bullet 1} \qquad \textbf{(T.3.a.)}$$

(1) $\boldsymbol{(A + B) + (\overline{A} \bullet \overline{B}) = 1}$ **(T.2.b.)**

SEGUNDA PARTE.

$$\boldsymbol{(A + B) \bullet (\overline{A} \bullet \overline{B})} = (\overline{A} \bullet \overline{B}) \bullet (A + B) = \qquad \textbf{(P.4.b.)}$$

$$= (\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet A) + (\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet B) = \qquad \textbf{(P.5.b.)}$$

$$= \mathbf{0 + 0} \qquad \textbf{(P.6.b.)}$$

(2) $\boldsymbol{(A + B) \bullet (\overline{A} \bullet \overline{B}) = 0}$ **(T.2.a.)**

Por tanto, de **(1)** y **(2)** se concluye que:

$$\boldsymbol{\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}}$$

T.11

11.*a*. $\boldsymbol{(A \bullet B) + (\overline{A} \bullet C) + (B \bullet C) = (A \bullet B) + (\overline{A} \bullet C)}$

11.*b*. $\boldsymbol{(A + B) \bullet (\overline{A} + C) \bullet (B + C) = (A + B) \bullet (\overline{A} + C)}$

DEMOSTRACIÓN DE 11.a

$$\boldsymbol{(A \bullet B) + (\overline{A} \bullet C) + (B \bullet C)} = (A \bullet B \bullet 1) + (\overline{A} \bullet 1 \bullet C) + (1 \bullet B \bullet C) = \qquad \textbf{(P.3.b.)}$$

$$= [A \bullet B \bullet (C + \overline{C})] + [\overline{A} \bullet (B + \overline{B}) \bullet C] + [(A + \overline{A}) \bullet B \bullet C] = \qquad \textbf{(P.6.b.)}$$

$$= (A \bullet B \bullet C) + (A \bullet B \bullet \overline{C}) + (\overline{A} \bullet B \bullet C) + (\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet C) + (\underline{\overline{A} \bullet B \bullet C}) + (\underline{A \bullet B \bullet C}) = \qquad \textbf{(P.5.b.)}$$

$$= (A \bullet B \bullet C) + (A \bullet B \bullet \overline{C}) + (\overline{A} \bullet B \bullet C) + (\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet C) = \qquad \textbf{(T.2.)}$$

$$= [A \bullet B \bullet (C + \overline{C})] + [\overline{A} \bullet C \bullet (B + \overline{B})] = \qquad \textbf{(P.5.a.)}$$

$$= (A \bullet B \bullet 1) + (\overline{A} \bullet C \bullet 1) \qquad \textbf{(P.6.a.)}$$

$$(A \bullet B) + (\overline{A} \bullet C) + (B \bullet C) = (A \bullet B) + (\overline{A} \bullet C) \qquad \textit{(P.3.b.)}$$

T.12

12.*a*. $(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B} \bullet C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$

12.*b*. $(A + B) \bullet (A + \overline{B} + C) = (A + B) \bullet (A + C)$

DEMOSTRACIÓN DE 12.a.

$$(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B} \bullet C) = A \bullet (B + \overline{B} \bullet C) = \qquad \textit{(P.5.b.)}$$

$$= A \bullet (B + C) \qquad \textit{(T.9.a.)}$$

$$(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B} \bullet C) = (A \bullet B) + (A \bullet C) \qquad \textit{(P.5.b.)}$$

T.13

13.*a*. $(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B}) = A$

13.*b*. $(A + B) \bullet (A + \overline{B}) = A$

DEMOSTRACIÓN DE 13.a

$$(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B}) = A \bullet (B + \overline{B}) = \qquad \textit{(P.5.b.)}$$

$$= A \bullet 1 \qquad \textit{(P.6.b.)}$$

$$(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B}) = A$$

Para fácil referencia, los teoremas se resumen en la siguiente tabla:

TEOREMA PRIMAL		TEOREMA DUAL	
T.1.a.	**0** ES UNICO	***T.1.b.***	**1** ES UNICO
T.2.a.	$A + A = A$	***T.2.b.***	$A \cdot A = A$
T.3.a.	$A + 1 = 1$	***T.3.b.***	$A \cdot 0 = 0$
T.4.a.	$A + (A \cdot B) = A$	***T.4.b.***	$A \cdot (A + B) = A$
T.5.	$\overline{A}$ ES UNICO		
T.6.	$A = \overline{\overline{A}}$		
T.7.a.	$A \cdot [(A + B) + C] = [(A + B) + C] \cdot A = A$	***T.7.b.***	$A + [(A \cdot B) \cdot C = [(A \cdot B) \cdot C] + A = A$
T.8.a.	$A + (B + C) = (A + B) + C$	***T.8.b.***	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
T.9.a.	$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$	***T.9.b.***	$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
T.10.a	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	***T.10.b.***	$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$
T.11.a	$(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C)$	***T.11.b.***	$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) = (A+B) \cdot (\overline{A}+C)$
T.12.a	$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B} \cdot C) = (A \cdot B)+(A \cdot C)$	***T.12.b.***	$(A + B) \cdot (A + \overline{B} + C) = (A + B) \cdot (A + C)$
T.13.a	$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$	***T.13.b.***	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

1.4. COMPUERTAS LÓGICAS.

En la siguiente tabla se presentan los símbolos de las compuertas lógicas que se utilizarán, de aquí en adelante, para la realización de los circuitos lógicos. Éstas realizarán las funciones lógicas y también servirán de base para el diseño de circuitos más complejos.

Estamos en posibilidad de mostrar el empleo de símbolos gráficos y expresiones algebraicas.

EJEMPLO 1. Supóngase que partiendo del enunciado verbal de un determinado problema, se tiene la siguiente expresión:

$$F(A,B,C,D) = \overline{A} \bullet \overline{B} + A \bullet B + A \bullet \overline{B} \bullet C \qquad \textit{(1)}$$

Y deseamos obtener el *diagrama del circuito lógico* que realice esta función. Las variables **A**, **B**, y **C** serán las entradas del circuito y **F** será la salida. De la expresión observamos que se tienen tres términos, cada uno de los cuales requiere de una compuerta **Y**, las dos primeras de dos entradas y una tercera de tres entradas. La salida de cada una de estas compuertas es la entrada de una compuerta **O**. A la salida de esta compuerta se tendrá la función de salida. Pero antes, por cada variable testada que se tenga, se requiere que ésta pase por un inversor. Al **diagrama lógico** en estas notas le denominaremos **logigrama**.

El **logigrama** que representa la función, queda de la siguiente manera:

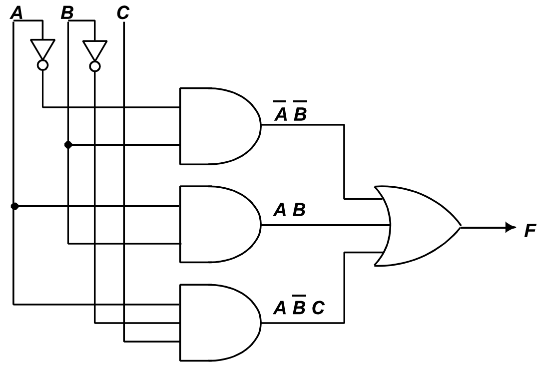
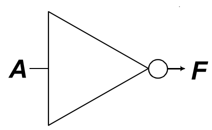
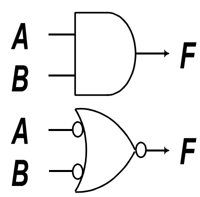
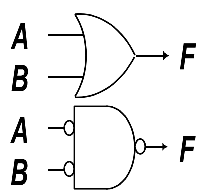
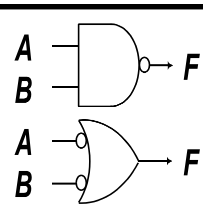
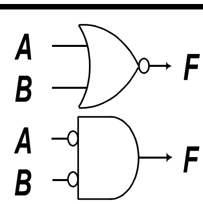
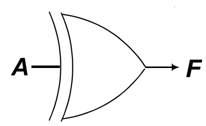
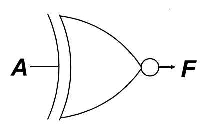


FIGURA 1

COMPUERTA	SÍMBOLO	FUNCIÓN	TABLA DE VERDAD
INVERSOR		$F = \overline{A}$	A F 0 1 1 0
Y		$F = A \bullet B$	A B F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
O		$F = A + B$	A B F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
No Y		$F = \overline{A \bullet B}$ $= \overline{A} + \overline{B}$	A B F 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
No O		$F = \overline{A + B}$ $= \overline{A} \bullet \overline{B}$	A B F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0

COMPUERTA	SÍMBOLO	FUNCIÓN	TABLA DE VERDAD		
			A	B	F
O EXCLUSIVA		$F = A\overline{B} + \overline{A}B$ $= A \oplus B$	0	0	0
			0	1	1
			1	0	1
			1	1	0
			A	B	F
No O EXCLUSIVA		$F = AB + \overline{A}\,\overline{B}$ $= \overline{A \oplus B}$	0	0	1
			0	1	0
			1	0	0
			1	1	1

Sin embargo, el circuito anterior es factible de reducirse y es aquí donde se utilizan los postulados y teoremas. Aún cuando en este capítulo no es objetivo la simplificación de funciones Booleanas, sí lo es aplicar postulados y teoremas.

De la función, observamos que los dos últimos términos no son más que el teorema **12.a.**, por lo tanto:

$$F = \overline{A} \bullet \overline{C} + A \bullet B + A \bullet C \qquad \textbf{\textit{(T.12.a.)}}$$

$$F = \overline{A} \bullet \overline{C} + A \bullet C + A \bullet B \qquad \textbf{\textit{(P.4.a.)}}$$

Ahora la expresión queda con tres compuertas de dos entradas cada una, pero observamos que los dos primeros términos forman la **O EXCLUSIVA NEGADA**, por lo tanto, la función queda:

$$\boldsymbol{F = \overline{A \oplus C} + A \bullet B}$$

El logigrama reducido es:

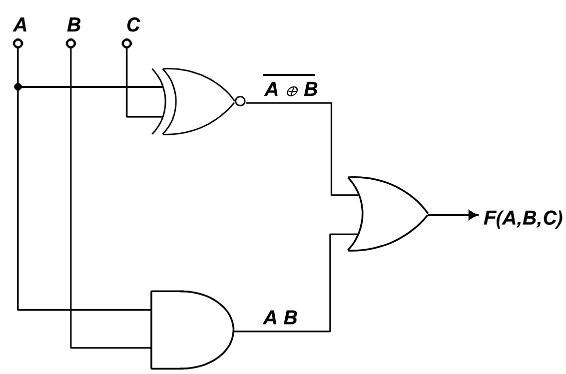


FIGURA 2

Con respecto al primer logigrama, observamos que se disminuyó en una compuerta, además de que no se utilizó ningún inversor. Más adelante hablaremos del costo del circuito.

EJEMPLO 2. Supóngase que por algún medio se ha diseñado el circuito que se muestra en la **Figura 3** y se pide, de ser posible, obtener un circuito más sencillo que realice la misma función.

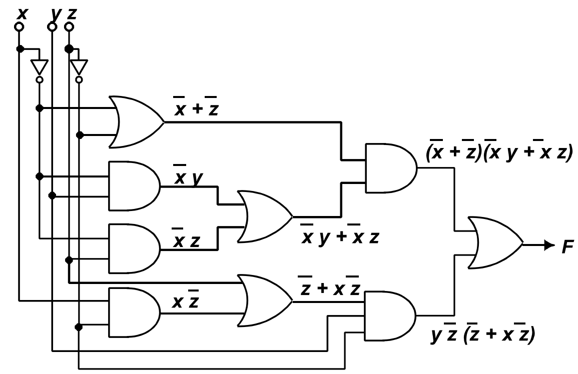


FIGURA 3

Primero, es necesario determinar la expresión **F** realizada por el circuito. Esto se obtiene determinando la expresión lógica a la salida de cada compuerta, hasta llegar a la última del diagrama. Siguiendo el procedimiento anterior, obtenemos:

$$\boldsymbol{F(x,y,z) = (\bar{x} + \bar{z})(\bar{x}y + \bar{x}z) + y\bar{z}(\bar{z} + \bar{z}x)} \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

Aplicando postulados y teoremas a la ecuación ***(2)***:

$$\boldsymbol{F(x,y,z)} = (\bar{x} + \bar{z})(\bar{x}y + \bar{x}z) + y\bar{z}[\bar{z}(1 + x)] = \qquad \textbf{\textit{(P.5.)}}$$

$$= \bar{x}(\bar{x}y + \bar{x}z) + \bar{z}(\bar{x}y + \bar{x}z) + y\bar{z} = \qquad \textbf{\textit{(T.4.a.;T.2.b.)}}$$

$$= \bar{x} \bullet \bar{x}y + \bar{x} \bullet \bar{x}z + \bar{z} \bullet \bar{x}y + \bar{z} \bullet \bar{x}z + y\bar{z} = \qquad \textbf{\textit{(P.5.b.)}}$$

$$= \bar{x}y + \bar{x}z + \bar{x}y\bar{z} + y\bar{z} = \qquad \textbf{\textit{(T.2.b.)}}$$

$$= \bar{x}y + \bar{x}z + (\bar{x} + 1)y\bar{z} = \qquad \textbf{\textit{(T.3.a.)}}$$

$$= \bar{x}y + \bar{x}z + y\bar{z}$$

$$\boldsymbol{F(x,y,z) = y\bar{z} + \bar{x}z} \qquad \textbf{\textit{(T.11.a.)}}$$

El nuevo logigrama se muestra en la **FIGURA 4**.

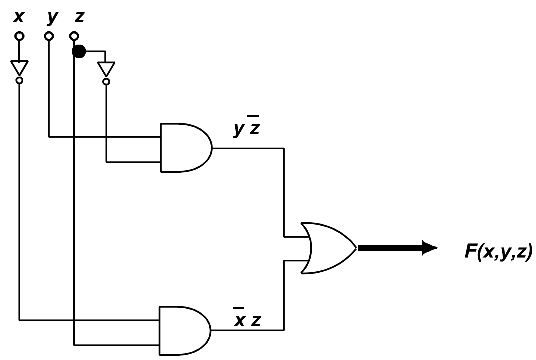


FIGURA 4

Vemos que tanto la expresión como el circuito se han simplificado considerablemente, pero realizando la misma función. Con estos dos ejemplos se ha tratado de mostrar la aplicación del álgebra de Boole, tanto en el análisis como en la síntesis.

1.5 FUNCIONES DE CONMUTACIÓN

Una **variable binaria** es una **variable discreta** que puede asumir sólo dos valores. ***Una función de conmutación de una o más variables, es una variable binaria cuyo valor depende de los valores de las variables de conmutación***. El símbolo **f** se emplea para denotar una función de conmutación: **f = f(A, B, C,...)**; las variables **A, B, C,..,** son *variables independientes*, mientras **f** es una *función dependiente*.

El valor de una función de conmutación depende del valor de sus variables independientes. Es fácil ver que para **n variables**, *el número de combinaciones posibles es* 2^n. A continuación se muestra la tabla para tres variables, con $2^3=8$ combinaciones posibles.

TABLA FUNCIONAL

A	B	C	f
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

Ahora bien, si los ocho signos de interrogación, en la columna **f** se sustituyen por cualquier combinación de unos y ceros, quedará definida una función específica de **A**, **B**, **C**. Como se tienen ocho hileras, habrá entonces 2^8 combinaciones diferentes para **f**, es decir, se tendrán 2^8 *funciones de conmutación diferentes*. El valor de **f**, para una hilera particular se denomina **valor funcional** para la correspondiente combinación de valores.

DEFINICIÓN: *Una función de conmutación de **n** variables, es cualquier asignación particular de valores funcionales para las* 2^n *combinaciones posibles de valores de **n** variables.*

EJEMPLO 3. Determine la función de conmutación para un circuito que detecte los números primos, para cuando se tengan cuatro variables de entrada.

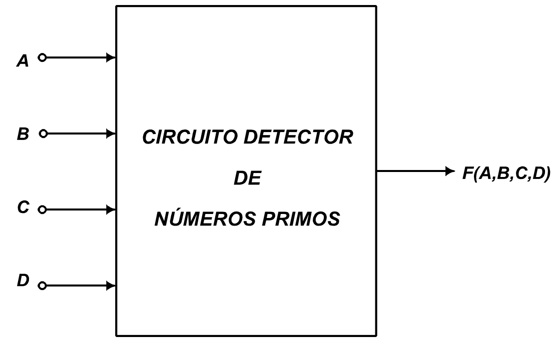


TABLA FUNCIONAL

DEC	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**1**
4	0	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**1**

DEC	A	B	C	D	F
8	1	0	0	0	**0**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**0**
11	1	0	1	1	**1**
12	1	1	0	0	**0**
13	1	1	0	1	**1**
14	1	1	1	0	**0**
15	1	1	1	1	**0**

Por definición un número primo es aquel que solamente es divisible por la unidad y por sí mismo, por lo tanto, cuando las combinaciones binarias correspondientes a los números **1**, **2**, **3**, **5**, **7**, **11** y **13**, se presentan a la entrada del circuito, a la salida se tendrá un **1** lógico.

En base a este razonamiento, la función de conmutación se representa de la siguiente forma:

$$F(A,B,C,D) = \sum_m (1,2,3,5,7,11,13) \qquad (3)$$

En la siguiente sección se explicará cómo se interpreta esta función.

1.6 FORMAS NORMALES DE LAS FUNCIONES DE CONMUTACIÓN.

En el párrafo anterior se vio que, dada una función en forma algebraica, es posible determinar la tabla funcional. Esta tabla es única para una función específica, como la mostrada en la ecuación *(3)*. Dentro de las $(2^2)^n$ expresiones, la que más debe interesarnos es la forma canónica. La relación que guarda la forma canónica con la tabla funcional es muy importante, ya que por inspección de ésta se obtiene la forma canónica.

Antes de continuar con la forma canónica de una función, se darán las siguientes definiciones:

LITERAL. *Una variable y/o su complemento.*

$$A,\ \overline{A},\ B,\ \overline{B},...$$

TÉRMINO PRODUCTO. *Conjunto de literales relacionadas por la conectiva* C.

$$(A \bullet B \bullet C),\ (B \bullet C \bullet D),\ (A \bullet B \bullet D)$$

TÉRMINO SUMA. *Conjunto de literales relacionadas por la conectiva* **+**.

$$(A + B + C),\ (B + C + D),\ (A + B + D)$$

TÉRMINO NORMAL. *Un término producto o suma en el cual ninguna literal aparece más de una vez*

- **Producto normal**
- **Suma normal**

TÉRMINO CANÓNICO. *Término normal que contiene tantas literal como variables la función.*

Producto canónico o minitérmino.

$$A \bullet B \bullet C,\ A \bullet B \bullet \overline{C},\ A \bullet \overline{B} \bullet C \quad \text{(para tres variables)}$$

Suma canónica o maxitérmino.

$$A + B + C,\ A + B + \overline{C},\ A + \overline{B} + C \quad \text{(para tres variables)}$$

FORMA SUMA DE PRODUCTOS. *Una suma de términos producto (**MINITÉRMINO**) de una función.*

$$F(A,B,C) = \sum_{\mathit{minitérminos}} (\quad) = \sum_{m} (\quad)$$

$$F(A,B,C) = (\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}) + (\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet C) + (\overline{A} \bullet B \bullet \overline{C})$$

FORMA PRODUCTO DE SUMAS. *Un producto de términos suma (**MAXITÉRMINOS**) de una función.*

$$F(A,B,C) = \prod_{\mathit{MAXITÉRMINOS}} (\quad) = \prod_{M} (\quad)$$

$$F(A,B,C) = (A + B + C) \bullet (A + B + \overline{C}) \bullet (A + \overline{B} + C)$$

FORMA CANÓNICA DE UNA FUNCIÓN. *Es aquella en que todos los términos son canónicos y aparecen una sola vez. Se tienen dos formas:*

1. Suma de productos canónicos o suma de **MINITÉRMINOS**.

$$F(\ ) = \sum m(\ )$$

2. Producto de sumas canónicas o producto de **MAXITÉRMINOS**.

$$F(\ ) = \prod M(\ )$$

A continuación se muestra una tabla con tres variables, en donde se muestra la notación de los minitérminos y los maxitérminos.

DECIMAL	A	B	C	MINITÉRMINO		MAXITÉRMINO	
0	0	0	0	m_0	$\overline{A}\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}$	M_0	$A+B+C$
1	0	0	1	m_1	$\overline{A}\bullet\overline{B}\bullet C$	M_1	$A+B+\overline{C}$
2	0	1	0	m_2	$\overline{A}\bullet B\bullet\overline{C}$	M_2	$A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	m_3	$\overline{A}\bullet B\bullet C$	M_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	m_4	$A\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}$	M_4	$\overline{A}+B+C$
5	1	0	1	m_5	$A\bullet\overline{B}\bullet C$	M_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	m_6	$A\bullet B\bullet\overline{C}$	M_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$
7	1	1	1	m_7	$A\bullet B\bullet C$	M_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

EJEMPLO 4. *Diseñe un circuito que detecte números pares cuando a la entrada se tengan números binarios de 4 bits.*

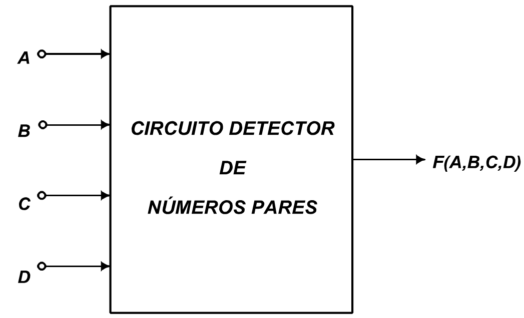


DIAGRAMA A BLOQUES

TABLA FUNCIONAL

DEC	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**0**

DEC	A	B	C	D	F
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**0**
10	1	0	1	0	**1**
11	1	0	1	1	**0**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	**0**
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**0**

FUNCIÓN CANÓNICA

$$F(A,B,C,D) = \sum_m (m_2, m_4, m_6, m_8, m_{10}, m_{12}, m_{14})$$

De otra forma:

$$F(A,B,C,D) = \sum_m (2,4,6,8,10,12,14)$$

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$$

LOGIGRAMA

El logigrama se presenta en la **FIGURA 5**.

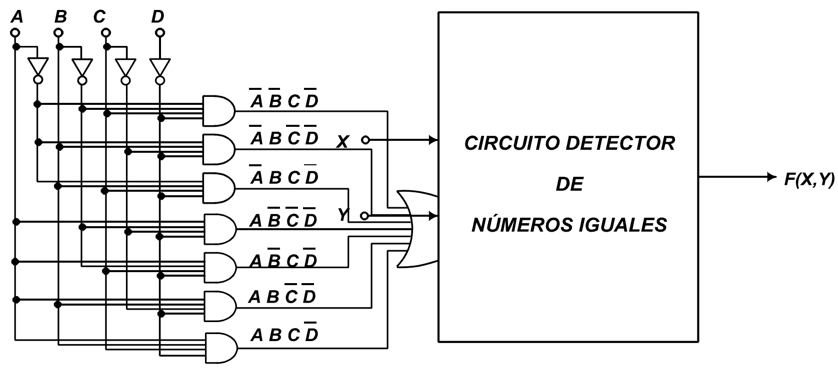


FIGURA 5. CIRCUITO DETECTOR DE NÚMEROS PARES

EJEMPLO 5. Se tienen dos números binarios de dos bits cada uno. Se desea diseñar un circuito tal que detecte cuándo estos números son iguales.

Definición de las variables.

X(*A, B*); **Y**(*C, D*); **F** = (**X**, **Y**)

TABLA FUNCIONAL

DEC	A	B	C	D	F		DEC	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	**1**		8	1	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**0**		9	1	0	0	1	**0**
2	0	0	1	0	**0**		10	1	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**0**		11	1	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**0**		12	1	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**1**		13	1	1	0	1	**0**
6	0	1	1	0	**0**		14	1	1	1	0	**0**
7	0	1	1	1	**0**		15	1	1	1	1	**1**

FUNCIÓN CANÓNICA

$$F_4(X,Y) = \sum_m (O,5,10,15)$$

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D +$$

$$A\overline{B}C\overline{D} + ABCD$$

El **logigrama** se muestra en la **FIGURA 6**.

En los ejemplos **4** y **5**, los circuitos se construyeron directamente de las funciones canónicas, ya que aún no se han utilizado los métodos de minimización; pero ¿qué sucede si la función se presenta como la ecuación **(1)**, **EJEMPLO 1**, y deseamos conocer la función canónica que la originó? En tal caso, debemos

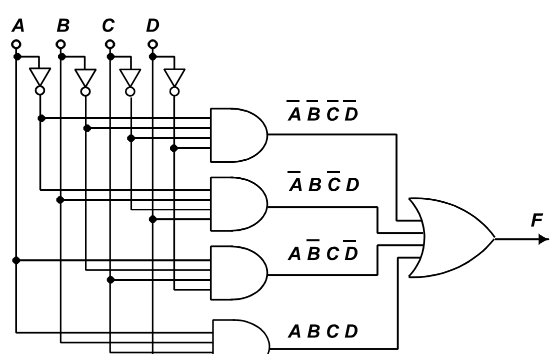


FIGURA 6. CIRCUITO COMPARADOR BINARIO

obtener dicha función canónica utilizando los siguientes teoremas:

1. Cualquier función de conmutación de **n** variables **F(A, B, C,...)**, se puede expresar como una suma normal de productos utilizando los siguientes postulados:

$$\boldsymbol{A \bullet 1 = A} \qquad \textit{(P.3.b.)}$$

$$\boldsymbol{A + \overline{A} = 1} \qquad \textit{(P.6.a.)}$$

$$\boldsymbol{A \bullet (B + \overline{B}) = (A \bullet B) + (A \bullet \overline{B})} \qquad \textit{(P.5.b.)}$$

2. Cualquier función de conmutación de **n** variables **F(A, B, C,...)**, se puede expresar como un producto normal de sumas, utilizando los siguientes postulados:

$$\boldsymbol{A + 0 = A} \qquad \textit{(P.3.a.)}$$

$$\boldsymbol{A \bullet \overline{A} = 0} \qquad \textit{(P.6.b.)}$$

$$\boldsymbol{A + (B \bullet \overline{B}) = (A + B) \bullet (A + \overline{B})} \qquad \textit{(P.5.a.)}$$

EJEMPLO 6. *Dada la siguiente función, encontrar la función canónica en forma de suma de productos.*

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D) = (AC + B)(CD + \overline{B})} = (AC + B)CD + (AC + B)\overline{B} =$$

$$= ACCD + BCD + A\overline{B}C + B\overline{B} = ACD + BCD + A\overline{B}C =$$

$$= A1CD + 1BCD + A\overline{B}C1 = A(B + \overline{B})CD + (A + \overline{A})BCD + A\overline{B}C(D + \overline{D}) =$$

$$= ABCD + A\overline{B}CD + ABCD + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} =$$

$$= \underset{\substack{1111\\ \mathbf{(15)}}}{ABCD} + \underset{\substack{1011\\ \mathbf{(11)}}}{A\overline{B}CD} + \underset{\substack{0111\\ \mathbf{(\ 7)}}}{\overline{A}BCD} + \underset{\substack{1010\\ \mathbf{(10)}}}{A\overline{B}C\overline{D}} =$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D) = \sum_m (7,10,11,15)}$$

EJEMPLO 7. *Obtener la función canónica en forma de producto normales de sumas.*

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \boldsymbol{(AC+B)(CD+\overline{B})} = (A+B)(B+C)(\overline{B}+C)(\overline{B}+D) =$$

$$= (A+B+0)(0+B+C)(0+\overline{B}+C)(0+\overline{B}+D) = (A+B+C\overline{C})(A\overline{A}+B+C)(A\overline{A}+\overline{B}+C)(A\overline{A}+\overline{B}+D) =$$

$$= (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+B+C)(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+D)(\overline{A}+\overline{B}+D) =$$

$$= (A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+D)(\overline{A}+\overline{B}+D) =$$

$$= (A+B+C+D\overline{D})(A+B+\overline{C}+D\overline{D})(\overline{A}+B+C+D\overline{D})(A+\overline{B}+C+D\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+D\overline{D})(A+\overline{B}+C\overline{C}+D)$$

$$(\overline{A}+\overline{B}+C\overline{C}+D) =$$

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = (A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})(A+B+\overline{C}+D)(A+B+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+B+C+D)(\overline{A}+B+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+D)$$

$$= (A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D) =$$

$$= \underset{\substack{0\,0\,0\,0\\ \mathbf{(0)}}}{(A+B+C+D)}\;\underset{\substack{0\,0\,0\,1\\ \mathbf{(1)}}}{(A+B+C+\overline{D})}\;\underset{\substack{0\,0\,1\,0\\ \mathbf{(2)}}}{(A+B+\overline{C}+D)}\;\underset{\substack{0\,0\,1\,1\\ \mathbf{(3)}}}{(A+B+\overline{C}+\overline{D})}$$

$$\underset{\substack{1\,0\,0\,0\\ \mathbf{(8)}}}{(\overline{A}+B+C+D)}\;\underset{\substack{1\,0\,0\,1\\ \mathbf{(9)}}}{(\overline{A}+B+C+\overline{D})}\;\underset{\substack{0\,1\,0\,0\\ \mathbf{(4)}}}{(A+\overline{B}+C+D)}\;\underset{\substack{0\,1\,0\,1\\ \mathbf{(5)}}}{(A+\overline{B}+C+\overline{D})}$$

$$\underset{\substack{1\,1\,0\,0\\ \mathbf{(12)}}}{(\overline{A}+\overline{B}+C+D)}\;\underset{\substack{1\,1\,0\,1\\ \mathbf{(13)}}}{(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})}\;\underset{\substack{0\,1\,1\,0\\ \mathbf{(6)}}}{(A+\overline{B}+\overline{C}+D)}\;\underset{\substack{1\,1\,1\,0\\ \mathbf{(14)}}}{(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D)} =$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \prod_{M} \mathbf{(0,1,2,3,4,5,6,8,9,12,13,14)}$$

Se puede observar de los resultados de los **EJEMPLOS 6** y **7**, que partiendo de la misma función no canónica, se puede obtener la función canónica en sus dos formas: como suma de minitérminos o como producto de maxitérminos. También observamos que los términos que no están en una función, están en la otra, pero que la suma de ambos dan los $\mathbf{2^n}$ términos.

EJEMPLO 8. *De la siguiente función, encontrar la función canónica en la forma de producto de maxitérminos.*

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \boldsymbol{(A+B)(A+C+D)}$$

Utilizando los teoremas antes expuestos:

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \boldsymbol{(A+B)(A+C+D)} = (A+B+C\overline{C})(A+B\overline{B}+C+D) =$$

$$= (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D) =$$

$$= (A+B+C+D\overline{D})(A+B+\overline{C}+D\overline{D})(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D) =$$

$$= (A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})(A+B+\overline{C}+D)(A+B+\overline{C}+\overline{D})$$

$$(A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D) =$$

$$= \underset{\substack{0\,0\,0\,0\\ \mathbf{(0)}}}{(A+B+C+D)}\underset{\substack{0\,0\,0\,1\\ \mathbf{(1)}}}{(A+B+C+\overline{D})}\underset{\substack{0\,0\,1\,0\\ \mathbf{(2)}}}{(A+B+\overline{C}+D)}\underset{\substack{0\,0\,1\,1\\ \mathbf{(3)}}}{(A+B+\overline{C}+\overline{D})}\underset{\substack{0\,1\,0\,0\\ \mathbf{(4)}}}{(A+\overline{B}+C+D)} =$$

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \prod\nolimits_{\boldsymbol{M}} \mathbf{(0,1,2,3,4)}$$

De inmediato, sabemos que:

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \sum\nolimits_{\boldsymbol{m}} \mathbf{(5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)}$$

EJEMPLO 9. *De la siguiente función, encontrar la función canónica en la forma de suma de productos.*

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \boldsymbol{\overline{A}BD + A\overline{B}C}$$

Utilizando los teoremas:

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \boldsymbol{\overline{A}BD + A\overline{B}C} =$$

$$= \overline{A}B(C+\overline{C})D + A\overline{B}C(D+\overline{D}) =$$

$$= \underset{\substack{0111\\ \mathbf{(7)}}}{\overline{A}BCD} + \underset{\substack{0101\\ \mathbf{(5)}}}{\overline{A}B\overline{C}D} + \underset{\substack{1011\\ \mathbf{(11)}}}{A\overline{B}CD} + \underset{\substack{1010\\ \mathbf{(10)}}}{A\overline{B}C\overline{D}} =$$

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \sum\nolimits_{\boldsymbol{m}} \mathbf{(5,7,10.11)}$$

Automáticamente, sabemos que:

$$\boldsymbol{F(A,B,C,D)} = \prod\nolimits_{\boldsymbol{M}} \mathbf{(0,1,2,3,4,6,8,9,12,13,14,15)}$$

EJEMPLO 10. *Obtener la función canónica en la forma de suma de productos de la siguiente función:*

$$F(A,B,C,D) = A + B + C + D$$

SOLUCIÓN

$$F(A,B,C,D) = \sum_m (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.11,12,13,14,15)$$

La solución es inmediata ya que la función representa el maxitérmino cero, y como ya se dijo anteriormente, los términos que están en una función no están en la otra.

I.7. FORMAS DE EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN DE CONMUTACIÓN.

Existen cuatro formas para expresar una función de conmutación, las cuales son aplicadas para representar un circuito lógico, teniendo cada una su propia utilidad, y éstas son:

2. *Tabla Funcional.*

3. *Expresión Algebraica.*

4. *Logigrama.*

5. *Carta de Tiempo.*

TABLA FUNCIONAL. Es una forma tabular de la función que da el valor para cada una de las posibles combinaciones de las variables. La tabla en conveniente para la especificación inicial de una función, ya que su misma construcción asegura que la función quede completamente definida. Aún sin definirla previamente, el concepto de la tabla funcional ya fue usada en los ejemplos **(4)** y **(5)**. La principal desventaja de la tabla funcional es el tamaño, el cual dificulta su manejo cuando el número de variables es grande (para n=6).

EXPRESIÓN ALGEBRAICA. Una de las características importantes del álgebra, es la existencia de una variedad infinita de formas equivalentes para la misma función. El álgebra puede expresar las propiedades lógicas de un circuito, con respecto a la forma física del mismo. Desde luego, la manipulación algebraica puede ser útil herramienta para optimizar la realización de un circuito, de acuerdo con algún criterio.

LOGIGRAMA. Mientras la tabla funcional y las expresiones algebraicas son propiedades independientes de cualquier configuración del circuito, el logigrama muestra la topología de una realización particular del circuito que realiza la función lógica. Es una abstracción del circuito real, en donde se suprimen detalles irrelevantes para la función lógica del circuito. Como los elementos son ***cajas negras*** y líneas que las conectan, los circuitos que los contengan en su interior, pueden estar realizados en cualquier tecnología. El logigrama tiene una orientación más realista que el álgebra.

CARTA DE TIEMPOS. Esta carta es un diagrama práctico indispensable para el análisis y síntesis de circuitos lógicos complejos, de tamaño más que regulares. Se emplea extensamente en el diseño de computadoras, así como en la temporización de otros sistemas de control.

Su propósito es introducir el elemento tiempo en el álgebra de Boole. En cualquier ***circuito secuencial***, las relaciones de tiempo entre las señales son muy importantes y quedan mejor expresadas en una carta de tiempos. En la **FIGURA 7**, se muestra una carta de tiempos en la función **A C B**.

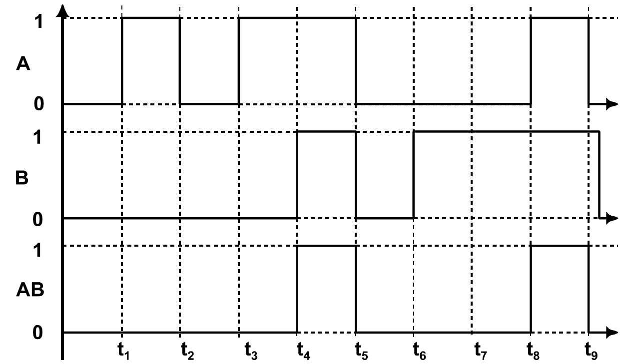


FIGURA 7. CARTA DE TIEMPOS DE LA FUNCIÓN AB

I.8 NIVELES DE CONMUTACIÓN.

Se habrá observado en los logigramas que la salida de una com-puerta puede ser la entrada de otra compuerta, y la salida de ésta puede ser la entrada de otra más, y así sucesivamente. Esta estructura de conexión entre compuertas, forma lo que se llama niveles de conmutación o simplemente niveles de circuito.

Por niveles de conmutación se entenderá el máximo número de compuertas que una o más de las variables atraviesa desde la entrada hasta la salida del circuito. Este concepto se muestra en la **FIGURA 8**.

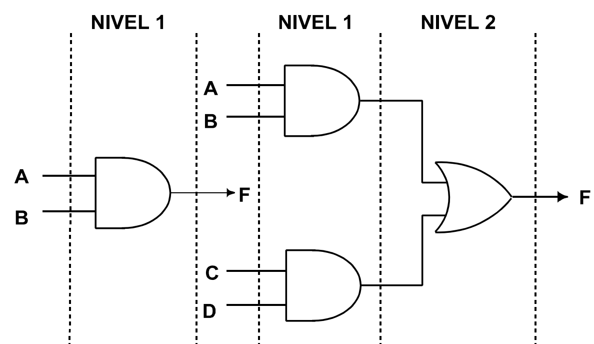


FIGURA 8. NIVELES DE CONMUTACIÓN

El concepto de los niveles de un circuito es importante en relación al retardo que las señales experimentan en un circuito.

I.9 EJERCICIOS.

1. *Utilizando los postulados y teoremas del álgebra de Boole, compruebe cadas una de las siguientes funciones, indicando, paso a paso, los postulados y teoremas empleados.*

a) $XY + \overline{X}\,\overline{Y} + X\overline{Y} = X + \overline{Y}$

b) $\overline{\overline{X}\,\overline{Z} + \overline{X}Y + \overline{X}Z + XY} = X\overline{Y}$

c) $(X + Y)(\overline{X}\,\overline{Z} + Z)(\overline{Y} + XZ) = XZ$

d) $AB + A\overline{B} = A$

e) $A + \overline{A}BC = A + BC$

f) $x + \overline{x}\,y = x + y$

g) $x(\overline{x} + y) = x\,y$

h) $\overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,yz + x\,\overline{y} = \overline{x}\,z + x\,\overline{y}$

i) $xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$ j) $(x+y)(\overline{x}+z)(y+z) = (x+y)(\overline{x}+z)$

2. *Compruebe las funciones del problema anterior utilizando las tablas de verdad.*

3. *Dadas las expresiones siguientes, obtenga el logigrama correspondiente.*

a) $F(X,Y,Z) = Y(\overline{Z} + Z\overline{X}) + (\overline{X}+Z)(\overline{X}Y + XZ)$

b) $F(W,X,Y,Z) = X + XYZ + \overline{X}YZ + WX + \overline{W}X + \overline{X}Y$

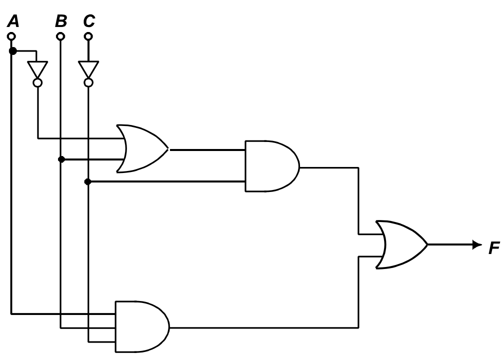
c) $F(X,Y,Z) = (X+Y)[XYZ + (X+Z)\overline{Y}] + XY\overline{Z}(X+\overline{X}Y)$

d) $F(X,Y,Z) = (X+\overline{X}\,\overline{Y})[XZ + X\overline{Z}(X+\overline{Y})]$

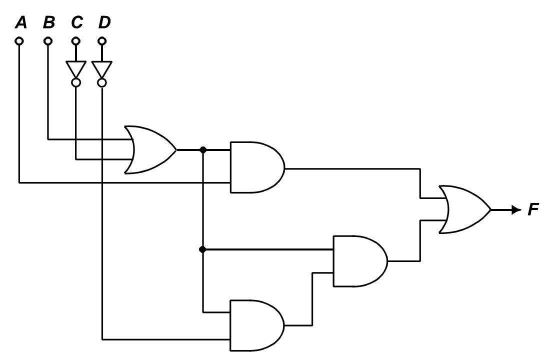
e) $F(X,Y,Z) = X + Y[YZ + \overline{X}\,\overline{Y}Z(X+Z)](X+\overline{Z})$

4. *Dados los siguientes logigramas, encuentre la expresión representativa de la función de salida.*

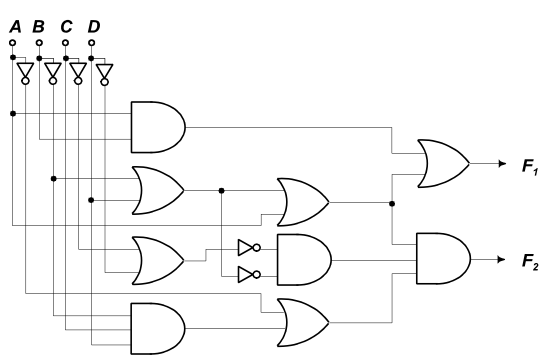
a)



b)



c)



5. *Simplifique las funciones obtenidas de los logigramas del problema anteriores.*

6. *Encuentre el complemento de las siguientes funciones:*

$$F_1 = \bar{x}\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z \qquad F_2 = x(\bar{x}\,\bar{z} + z)$$

7. *Utilizando los postulados y el álgebra de Boole, encuentre las formas canónicas de las siguientes funciones:*

a) $F(A,B,C) = ABC + \bar{A}BC + \bar{B}\,\bar{C}$

b) $F(A,B,C) = (A + B)(\bar{A} + C)(\bar{B} + C)$

c) $F(A,B,C,D) = \bar{A}(A + B + C + D)$

d) $F(A,B,C,D) = A\bar{C} + BC + \bar{A}B + C\bar{D}$

e) $F(A,B,C,D) = \bar{A}\,\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A}BC$

f) $F(W,X,Y,Z) = \bar{W}(\bar{X}Y + \bar{X}\,\bar{Y} + XYZ) + \bar{X}\,\bar{Z}(Y + W)$

g) $G(W,X,Y,Z) = \bar{W}X(\bar{Y}Z + Y\bar{Z}) + XYZ$

h) $F(A,B,C,D) = \bar{A}(BC + \bar{D}) + (A + D)(B + C)$

i) $F(W,X,Y,Z) = WY + X(W + Y\bar{Z})$

j) $F(A,B,C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C$

k) $F(A,B,C,D) = (A + \bar{B})(A + C + D)$

l) $F(A,B,C,D) = \bar{A}(B + \bar{C} + D)(A + C + D)$

m) $F(A,B,C,D) = (B + \bar{C})(A + \bar{D})$

8. *Determine si las siguientes funciones son lógicamente equivalentes:*

$$F(a,b,c,d,e) = \bar{b}\,\bar{e} + a\,\bar{c}\,e + cde$$

$$G(a,b,c,d,e) = (\bar{b} + e)(\bar{a} + \bar{c} + \bar{e})(a + c + \bar{e})(a + d + \bar{e})$$

9. *Reemplazar el circuito de conmutación de la siguiente figura por compuertas lógicas.*

Encuentre los 4 esquemas del logigrama.