# EL ÁLGEBRA DE LA LÓGICA

*Francisco C. García Durán*

## INTRODUCCIÓN

A reserva de lo que depare el futuro, desde el "ahora" de nuestro siglo XXI es posible afirmar que los años decisivos para el desarrollo de las matemáticas fueron los decimonónicos. Durante ellos hicieron su aparición varias áreas disciplinarias nuevas, entre ellas las geometrías no-euclidianas y las álgebras de vectores y matrices, además del álgebra abstracta, que dieron lugar a cambios en la concepción de las matemáticas y en cuáles son sus temas de estudio. Brevemente podríamos decir que durante el siglo XIX se pasó de una matemática apegada a la "realidad" de los sentidos físicos: números y espacio euclidiano, a una matemática dedicada a conceptos y cuestiones abstractos, propios de la disciplina y sin liga directa aparente con la realidad. La lógica no escapó a este fenómeno, y si a principios del siglo XIX los estudios lógicos no utilizaban herramientas matemáticas, durante el transcurso de éste se propició una tan estrecha cercanía con las matemáticas que a su término hubo intentos, principalmente de Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred N. Whitehead (1861-1947), para fundamentar la matemática en la lógica.

Este cambio en la tendencia del desarrollo de la lógica se dio durante la primera mitad del siglo decimonónico a partir del punto de quiebre que significó la aparición del álgebra de la lógica, obra del inglés George Boole (1815-1864). Con él se inicia el uso de herramientas matemáticas, en particular algebraicas, para la investigación lógica, dando lugar así al surgimiento de la teoría de lo que hoy conocemos como lógica matemática. En este texto damos un vistazo general a la historia de dicha aparición, que es un claro ejemplo de cómo un ambiente ad hoc, con intercambio de ideas, fomenta una nueva teoría. Nos limitaremos a las ideas más inmediatamente precursoras, tanto dentro de las matemáticas como en la lógica, y a las ideas iniciales básicas de esta álgebra, tal como fue presentada por Boole.

## IDEAS DESDE EL ÁLGEBRA

Toda la historia que nos ocupa transcurre en las islas británicas y se inicia con los trabajos del algebrista George Peacock (1791-1858), quien en su obra *A Treatise on Algebra* (1830) adelanta la idea de que el álgebra es una ciencia deductiva al igual que la geometría, y trata de darle un tratamiento lógico al estilo de los *Elementos* de Euclides. Posteriormente publica una segunda versión en dos partes, diferenciadas para sendas álgebras. El volumen I (1842) está dedicado a lo que él llama *álgebra aritmética* y en la cual "consideramos los símbolos como representantes de números, y las operaciones a las cuales ellos están sometidos tan incluidas en las mismas definiciones (sean expresadas o entendidas) como en la aritmética común: los signos + y – denotan las operaciones de adición y sustracción en su significado ordinario solamente, ...así en expresiones ... como $a - b$, debemos suponer $a$

mayor que *b*...” [4]. El volumen II (1845) está dedicado al *álgebra simbólica* que el autor, citado en [6], describe como “la ciencia que trata las combinaciones de signos y símbolos arbitrarios por medios definidos a través de leyes arbitrarias” y en la que “podemos asumir cualesquiera leyes para la combinación e incorporación de tales símbolos, en tanto nuestras suposiciones sean independientes, y por tanto no inconsistentes una con otra”.

En su trabajo, Peacock defendía dos puntos centrales. Primero, en todos los procesos del álgebra no se podía usar ninguna propiedad de una operación si no había sido puesto de manifiesto que tal propiedad pertenecía a esa operación, y no se le había establecido como una ley verdadera desde el comienzo o no había sido obtenida por deducción a partir de las leyes iniciales. Era así necesario el establecimiento completo del cuerpo de leyes que conciernen a las operaciones utilizadas en dichos procesos. En segundo lugar, para efectos deductivos, se debe considerar que los signos de las operaciones no tienen otros sentidos que aquellos que les han sido asignados por las leyes. Por ejemplo, ninguna propiedad de la multiplicación puede ser utilizada si no figura en la lista de propiedades de ella. Ésta es cualquier operación arbitraria que posea las propiedades expuestas en las leyes del álgebra relativas al signo $\times$ (o a cualquier otro signo que se pudiera proponer para la multiplicación).

Aunque las ideas teóricas para el álgebra simbólica de Peacock apuntaban a la posibilidad de construir álgebras para entidades distintas de los números, fueron sólo *un* paso importante hacia la separación del álgebra y la aritmética, pero no fueron *el* paso definitivo ya que, en la práctica, usando lo que él llamaba *el principio de la permanencia de formas equivalentes*, Peacock sólo extendió las reglas de la aritmética logrando así estudiar sus propiedades más generales, tales como la distribuidad, la conmutatividad y la asociatividad. Dicho coloquialmente, su álgebra simbólica no logra cortar el cordón umbilical con la aritmética, y ésta permanece subyacente en la primera. Dado que las ideas originales de Peacock ejercieron una profunda influencia en Boole, resulta tentador pensar que la permanencia de esta “atadura aritmética” en su álgebra simbólica es la fuente de uno de los defectos más señalados en el álgebra booleana original, lo cual comentaremos más adelante. Además de Boole, el matemático inglés Augustus de Morgan (1806-1871) también fue influenciado por el algebrista pero él sí da el paso definitivo de la separación, considerando que se podría crear un sistema algebraico con símbolos arbitrarios y un conjunto de leyes bajo las cuales estos símbolos fueran manipulados, y sólo después se daría una interpretación de las leyes y símbolos. En resumen, podríamos decir que para los años treinta del siglo XIX, los matemáticos iniciaban la explotación de la recién descubierta rica veta del álgebra abstracta. Uno de los campos sería algo que hasta esas fechas se consideraba ajeno totalmente a las matemáticas y sus métodos: la lógica.

## IDEAS DESDE LA LÓGICA

Con la excepción de la escuela de los Megáricos, que se dedicaron al estudio de la lógica proposicional, desde los trabajos fundacionales realizados por Aristóteles (384-322 a. C.) hasta el siglo XIX la gran mayoría de las investigaciones lógicas se circunscribían a la silogística. A este respecto recordemos, que si bien Aristóteles definió el silogismo como toda argumentación formal en la cual la conclusión es una consecuencia de las premisas, en su análisis se concentró en aquel tipo específico de inferencia inmediata donde aparecen dos premisas y una conclusión, con la característica de que las premisas tiene en común el "término medio". A este tipo de inferencia se asoció firmemente el nombre de "silogismo" y un ejemplo es el conocido desde el medioevo como *Barbara*:

Todo S es M.
Todo M es P.
Luego, todo S es P.

Para la formación de los silogismos, a Aristóteles le bastó con los cuatro enunciados categóricos tradicionalmente conocidos por las letras A, E, I y O:

| | | |
|---|---|---|
| A: | Todo S es P | Universal afirmativo |
| E: | Ningún S es P | Universal negativo |
| I: | Algún S es P | Particular afirmativo |
| O: | Algún S no es P | Particular negativo |

Así, la lógica anterior a la lógica matemática puede ser considerada como una serie de interminables tentativas de reformar, mejorar o extender el silogismo aristotélico para comprender nuevas formas de inferencia.

La más famosa de estas tentativas, y que influyó grandemente en Boole, fue la "cuantificación del predicado", introducida por el filósofo escocés William Hamilton (1788-1856). Este filósofo advirtió que el término predicado en cada uno de los cuatro enunciados categóricos tradicionales es ambiguo, en el sentido de que no queda claro si se refiere a todo el predicado o sólo a una parte del mismo. Por ejemplo, *todo A es B* puede significar *todo A es todo B* o *todo A es algún B*. Con esta cuantificación del predicado se logran ocho enunciados básicos para la construcción de silogismos. Por desgracia, la incapacidad matemática de Hamilton lo llevó a un sistema lógico complicado y oscuro, nada práctico, con demasiadas expresiones confusas. En su afán de remediar la oscuridad de sus expresiones con el desarrollo de una notación Hamilton hizo la innovación de formular como igualdades de enunciados los silogismos válidos con predicados cuantificados. Por ejemplo, el silogismo que comúnmente aparece en los cursos de lógica de preparatorias de corte humanístico,

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.
Por tanto, Sócrates es mortal.

Hamilton lo formulaba como,

Todos los hombres y algunos mortales son iguales.
Sócrates y algunos (en este caso, uno) hombres son iguales.
Por tanto, Sócrates y algunos (uno) mortales son iguales.

Algunos lógicos son de la opinión de que esta innovación es la única contribución importante de Hamilton a la lógica, porque así sugirió que los enunciados lógicos pueden ser reducidos a algo análogo a las ecuaciones algebraicas, llevando a una analogía entre la lógica y el álgebra.

En su tiempo, el trabajo de Hamilton no escapó a las críticas de sus contemporáneos, entre ellos Augustus de Morgan. Este último "encontró, entre los modos válidos de Hamilton, un silogismo cuya expresión era tan confusa que parecía afirmar que todos los hombres que no eran abogados estaban hechos de piedra. De Morgan lo llamaba el 'silogismo esperpento' y se provocó un debate acalorado entre los ingleses que estaban a favor y en contra del sistema de Hamilton" [3]. Dado que De Morgan también cuantificó el predicado dentro de su sistema, fue acusado de plagiario por Hamilton dando lugar a una larga polémica sostenida a través de libros y artículos de revistas que a veces era agria y en otras ocasiones, divertida. Debido a sus habilidades matemáticas, De Morgan logró hacer muchas contribuciones fructíferas a la lógica, principalmente en la teoría de silogismos. Las más conocidas en la actualidad son las llamadas *Leyes de De Morgan*.

El primer trabajo sobre lógica de este matemático inglés fue publicado en 1839 con el título *First Notions in Logic*, y sus papeles lógicos fueron publicados en una serie titulada *On the Syllogism*, aunque los primeros cuatro pueden ser encontrados también en su obra, publicada en 1847, *Formal Logic; or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable*. En sus trabajos, De Morgan usa letras mayúsculas, tales como $X$, $Y$, $Z$, etc. para términos generales arbitrarios o nombres, y para lo "contrario" de un nombre no usa un operador explícito de negación, sino la letra minúscula correspondiente al nombre. Por ejemplo, lo contrario del nombre $X$ es denotado $x$. La conjunción de proposiciones $P$ y $Q$ es expresada como $PQ$, y la disyunción como $P,Q$. Con esta notación una de sus leyes se enunciaría como: *lo contrario de PQ es p,q*. De Morgan parecía poco consciente de la importancia de una buena notación, como es evidente al comparar la notación anterior para las operaciones entre proposiciones con su notación para los cuatro enunciados categóricos:

| | |
|---|---|
| Todas las Xs son Ys | X)Y |
| Ningunas Xs son Ys | X,Y |
| Algunas Xs son Ys | XY |
| Algunas Xs no son Ys | X:Y |

donde los símbolos para E e I coinciden, respectivamente, con los de disyunción y conjunción.

De Morgan recibió instrucción formal clásica en latín, griego, hebreo y matemáticas, habiendo ingresado en 1823 al Trinity College en Cambridge, donde estudió las matemáticas europeas en boga. En su trabajo matemático abordó una vasta variedad de temas con énfasis en álgebra y lógica, por lo que resulta sorprendente que no haya sido capaz de establecer una liga entre estas dos áreas de estudio. Aunque su trabajo en lógica fue contemporáneo del de Boole, él era un lógico tradicional que conocía la teoría medieval de lógica y semántica, y en términos kuhneanos, a nivel de especulación, podríamos decir que si bien era uno de los articuladores del nuevo paradigma matemático, aparentemente concebía la lógica como independiente de las matemáticas por lo que en este campo fue un articulador del viejo paradigma aristotélico. Quizá su mayor conocimiento de la lógica antigua se constituyó en un obstáculo epistemológico para llegar a la idea de aplicar las herramientas algebraicas al estudio del área y de allí al nacimiento de un nuevo paradigma lógico. En contraste, Boole, a pesar de, o quizá debido a, ser un autodidacta con menores conocimientos de la lógica antigua, fue quien concibió dicha idea genial y con ello "ha descubierto la forma verdadera y general de la lógica, y ha dado a la ciencia la forma que, en lo fundamental, deberá tener en adelante. De esa manera, ha efectuado una reforma que difícilmente tiene punto de comparación en la historia de la lógica, desde la remota época de Aristóteles hasta nuestros días"[3]. Dicho lo anterior en 1874 por William Stanley Jevons (1835-1892) , el primer crítico y primer articulador del nuevo paradigma lógico.

Aunado a la cuantificación del predicado, con la nuevas teorías lógicas de Hamilton y De Morgan se dio también el cambio importante del punto de vista *intencional* para los enunciados al punto de vista *extensional*. Este cambio permitiría pasar de una lógica de *términos* a una lógica de *clases*. Desde Aristóteles los términos *sujeto*, S, y *predicado*, P, en un enunciado, se habían considerado signos de cualidades. Es decir, desde el punto de vista *intencional* se consideraba que el enunciado *todo perro es carnívoro* tenía el sentido de que la cualidad *ser carnívoro* se le atribuye a la cualidad *ser perro*; ser carnívoro es una *parte* de la cualidad de ser perro. En cambio, desde el punto de vista *extensional,* el sentido del enunciado anterior era que cualquier cosa que sea un perro tiene la propiedad de ser carnívoro. En otras palabras, el conjunto o *clase* de todas las cosas que son perros es una *parte* de la *clase* de todas las cosas que son carnívoras. Con esta nueva concepción el enunciado anterior era *todos los perros son carnívoros*, y, en general, esto se reflejaba en la notación de ambos lógicos, quienes empleaban "Todos los Ss son Ps" en lugar del tradicional "Todo S es P". Así, los términos S y P se volvieron signos de las cosas mismas que poseen las cualidades. Con esta concepción de los términos se estaba a un paso de pensar que la teoría de los nexos lógicos entre los enunciados que los incluyen: la silogística, se puede traducir a una teoría de las operaciones sobre las clases, es decir, a un álgebra de clases. Quien primero tuvo esta visión fue Boole, pero no cabe duda que conociendo las teorías lógicas de Hamilton y De Morgan sacó provecho de sus innovaciones: la cuantificación del predicado y el punto de vista extensional.

## EL ÁLGEBRA DE LA LÓGICA

Toda la intensa actividad en álgebra y lógica desarrollada en Gran Bretaña durante la primera mitad del siglo formó un caldo de cultivo, en plena ebullición, ideal para la aparición en 1847 del trabajo pionero de George Boole, *The Mathematical Análisis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*. Nadie mejor que el propio autor para decirnos su pretensión al escribir este pequeño volumen:

> Quienes estén familiarizados con el estado actual del álgebra simbólica, saben bien que la validez de los procedimientos de análisis no depende de la interpretación de los signos que se emplean, sino exclusivamente de las leyes para su combinación. Cualquier sistema de interpretación que deje intacta la verdad de las relaciones presupuestas por ese procedimiento es igualmente legítimo... sin embargo, el pleno reconocimiento de las consecuencias de esta importante doctrina fue retrasado por circunstancias secundarias en cierta medida... La expresión de magnitudes o de

> operaciones referentes a magnitudes ha sido el objetivo declarado para el que han sido inventados los símbolos del análisis y estudiadas sus leyes. De este modo las abstracciones del análisis moderno han estimulado, no menos que los diagramas intuitivos de la geometría antigua, la convicción de que la matemática es, en principio y no sólo de hecho, la ciencia de la magnitud... (En cambio) nosotros estamos en condiciones de dar precisamente como característica definitoria de cálculo la de que es un método basado en el uso de símbolos, cuyas leyes de combinación son conocidas y generales y cuyos resultados permiten una interpretación exenta de contradicciones...Sobre este principio general es sobre lo que yo me propongo construir el cálculo de la lógica y reclamo para él un lugar entre las formas reconocidas de análisis matemático, independientemente del hecho de que tal cálculo deba, por ahora, apartarse de ellas espontáneamente en todo lo referente a su objeto y sus instrumentos [1].

Para el logro de su objetivo, Boole construye un cálculo puramente algebraico mediante símbolos: 1, 0, $x$, $y$, $z$, $w$..., con sólo dos operaciones definidas a partir de ellos.
Suma: $x + y$; Producto: $xy$, para las cuales se cumplen las leyes siguientes:

| | |
|---|---|
| $x + y = y + x$ | $xy = yx$ |
| $x + (1 - x) = 1$ | $xy = x$ |
| $z = z1 = zx + z(1 - x)$ | $1x = x$ |
| $z(x + y) = zx + zy$ | $0x = 0$ |
| Es posible $x \neq 0$, $y \neq 0$, tal que $xy = 0$ | $x(1 - x) = 0$ |

Notemos que la ley booleana $x^2 = x$, y la más general $x^n = x$, no se cumple en la aritmética. Además, para los números reales es válido que si $xy = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$, ley que no se cumple en el álgebra de Boole. Por lo que es obvio que esta álgebra no corresponde al álgebra aritmética.

Interpretándola como un álgebra de clases y relaciones entre clases, Boole, a través de su cálculo, logra construir toda la silogística (el tema más tradicional de la lógica de esos días) por medio de ecuaciones. Mostrando con ello las bondades y el poder de las matemáticas aplicadas a la lógica, y estableciendo un vínculo duradero entre ambas ciencias. Para dar una breve ilustración de la naturaleza de su trabajo, citamos en lo que sigue algunos fragmentos de su ensayo publicado en 1848 y titulado significativamente *The Calculus of Logic* [2]. Aunque en este ensayo no está explícito, Boole le da al símbolo 0 la interpretación de *nada*, entendiendo por tal la clase que no tiene por elemento nada que sea elemento de la clase representada por 1. Y así,

> el universo de objetos concebibles es representado por 1 o la unidad. Este lo asumo como la concepción dominante y principal. Todas las concepciones subordinadas de clases se entiende que se forman por limitación, de acuerdo al siguiente esquema.
>
> Supongamos que tenemos la concepción de cualquier grupo de objetos consistentes de Xs, Ys, y otros, y que $x$, el cual llamaremos un símbolo

> electivo, representa la operación mental de seleccionar de ese grupo todas las Xs que contiene, o de fijar la atención sobre las Xs con la exclusión de todas las que no son Xs, *y* la operación mental de seleccionar las Ys, y así sucesivamente; entonces, al ser 1 o el universo la concepción dominante, tendremos
>
> $x1$ o $x$ = la clase X,
> $y1$ o $y$ = la clase Y,
> $x\,y1$ o $x\,y$ = la clase donde cada miembro está en ambos X e Y,
>
> y así sucesivamente.

De la misma manera tendremos

$1 - x$ = la clase no-X,
$1 - y$ = la clase no-Y,
$x(1 - y)$ = la clase cuyos miembros son Xs pero no-Ys,
$(1 - x)(1 - y)$ = la clase cuyos miembros son ni Xs ni Ys, etc.

Por la naturaleza de las operaciones mentales involucradas, Boole afirma que se cumplen las leyes de la distributividad, la asociatividad y la de $x^n = x$, a la cual llama *ley del índice* y la considera peculiar del cálculo. Aclara que la verdad de éstas no depende de las clases y sus miembros, ni de sus mutuas relaciones, sino que ellas "están de hecho incorporadas en todo lenguaje hablado o escrito". Además,

> con estas leyes está conectado un axioma general. Hemos visto que las operaciones algebraicas ejecutadas con símbolos selectivos representan procesos mentales. Así, la conexión de dos símbolos por el signo + representa la agregación de dos clases (*ajenas*) en una clase singular, la conexión de dos símbolos *xy* como en la multiplicación, representa la operación mental de seleccionar de una clase Y aquéllos miembros que también pertenecen a otra clase X, y así sucesivamente. Por tales operaciones, la concepción de una clase es modificada. Pero al lado de esto la mente tiene el poder de percibir relaciones de igualdad entre clases. El axioma en cuestión, entonces, es que si una relación de igualdad es percibida entre dos clases, esa relación permanece inalterada cuando ambos sujetos son igualmente modificados por las operaciones arriba descritas. Este axioma, y no el "*dictum* de Aristóteles", es el real fundamento de todo razonamiento, la forma y carácter del proceso, siendo, sin embargo, determinada por las tres leyes ya establecidas.

Observemos que posteriormente Jevons propone que la suma sea considerada entre clases no necesariamente ajenas. Con esto se tiene la ley $x + x = x$, distinta de la ley booleana original $x + x = 0$. A partir de estos conceptos, Boole transforma las proposiciones cuantificadas en ecuaciones y así, cualquier silogismo puede ser transformado en un sistema de ecuaciones, el cual es válido si las ecuaciones correspondientes a las premisas sometidas a manipulación algebraica nos permiten llegar a la ecuación correspondiente a la conclusión. Además, dadas las premisas de un silogismo, era posible obtener una conclusión manipulando algebraicamente las ecuaciones correspondientes a las premisas y llegando, si era posible, a una ecuación con interpretación lógica. A manera de ejemplo de la conversión a ecuaciones, veamos cuáles son las correspondientes a las cuatro proposiciones categóricas aristotélicas:

A: $y = vx$

E: $y = v(1 - x)$

I: $vy = v'x$

O: $vy = v'(1 - x)$

Boole llevó a cabo una completa formulación de sus ideas en la primera mitad de su obra de 1854, *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. En ella fue mucho más lejos en su intento de hacer uso de las operaciones y procesos de matemáticas para la construcción de su teoría lógica. Estaba dispuesto a permitir el uso de cualquier idea del álgebra aritmética, siempre y cuando ello le ayudase a obtener las respuestas correctas. No le importaba que con ello los pasos intermedios en la resolución de un problema lógico no tuviesen sentido desde el punto de vista lógico. Este predominio de lo aritmético pareciera un resabio de la "atadura aritmética" de Peacock, siendo uno de los defectos que le encontró Jevons, quien, por el contrario, pensaba que todo paso algebraico debería corresponder a un paso lógico.

Lo notable del álgebra de la lógica de Boole es que también podía ser interpretada, como lo hizo en su momento su propio creador para la hasta entonces poco trabajada lógica proposicional. Con ello se daba por primera vez una teoría unitaria de la lógica. En esta álgebra de proposiciones se tienen todas las leyes del álgebra de clases y una más que le es completamente propia: $x = 0$ o $x = 1$. Esperamos que, con lo hasta aquí dicho, el lector obtenga una apreciación favorable de la genialidad de George Boole y de por qué ocupa un lugar preponderante en la historia de la lógica.

## REFERENCIAS

[1] Agazzi, Evandro (1986). *La Lógica Simbólica*. Ed. Herder, Barcelona, España.

[2] Boole, George (1848). *The Calculus of Logic*. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. III, pp. 183-198.

[3] Gardner, Martin (1973). *Máquinas Lógicas y Diagramas*. Col. DINA, Editorial Grijalbo, D. F., México.

[4] Peacock, George (1940). *A Treatise on Algebra. Vol. I. Arithmetical Algebra*. Scripta Mathematica, New York, N. Y., USA.

## SITIOS EN RED

[5] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Peacock.html

[6] http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Boole/CalcLogic/CalcLogic.html