Doble Grado en Derecho y en Administración y Dirección de Empresas
Matemáticas I. Curso 2018 - 2019

RELACIÓN 4: MATRICES Y DETERMINANTES

EJERCICIO 1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcular $A\,B$, $B\,A$, $(A\,B)^t$, $B^t\,A^t$ **¿Qué conclusiones puedes extraer de los resultados obtenidos?**

EJERCICIO 2.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**.**

1. **Calcular** $(A+B)^2$ **y** A^2+B^2+2AB
2. **Calcular** $(A-B)^2$ **y** A^2+B^2-2AB
3. **Hallar** $(A+B)(A-B)$ **y** A^2-B^2
4. **¿Qué conclusiones puedes extraer de los resultados obtenidos?**

EJERCICIO 3.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \; ; \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Obtener la matriz** $5A-2B$**.**
- **Hallar una matriz** D **de manera que** $A+B-D = 0_{3\times 2}$**, (matriz nula de orden** 3×2**).**
- **Calcular, cuando sea posible, los productos:** $A\,B$**;** $B\,A$**;** A^tB^t **y** B^tA^t.

EJERCICIO 4.- Efectuar los siguientes productos de matrices:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} ; \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.- Una empresa elabora dos productos, I y II, usando diferentes cantidades de las tres materias primas, P,Q y R. Sean las materias primas usadas dadas por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} P & Q & R & \\ 3 & 2 & 4 & \textit{producto I} \\ 2 & 5 & 1 & \textit{producto II} \end{pmatrix}$$

La empresa produce estos dos productos en dos localidades distintas, X e Y. Los costos de las materias primas, por unidad, en las dos localidades X e Y vienen dados por la matriz

$$B = \begin{array}{cc} \begin{matrix} X & \;\; Y \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P \\ Q \\ R \end{matrix} \end{array}$$

Calcular, utilizando el producto de matrices, el costo total de materias primas por unidad de cada uno de los productos en la localidad X y en la localidad Y.

EJERCICIO 6.- En las elecciones de cierta ciudad concurren habitualmente tres partidos políticos diferentes, A, B y C. Los estudios realizados en sucesivas convocatorias electorales demuestran que los votantes cambian de partido político de una convocatoria a otra según los siguientes porcentajes:

	Votantes de A	Votantes de B	Votantes de C
Pasan a A	**80%**	**20%**	**30%**
Pasan a B	**10%**	**70%**	**10%**
Pasan a C	**10%**	**10%**	**60%**

Si los votantes iniciales de cada partido, expresados en millones, vienen dados por $A_0 = 1$, $B_0 = 3$, y, $C_0 = 6$, calcular el número de votantes de cada partido en la siguiente convocatoria de elecciones.

EJERCICIO 7.- Una fábrica produce dos modelos de frigoríficos, A y B, en tres acabados distintos, blanco, titanio y acero. La producción trimestral del tipo A es: 50 unidades en blanco, 150 en titanio y 200 en acero. La producción trimestral del tipo B es: 75 en blanco, 100 en titanio y 200 en acero. Por otra parte, la terminación en blanco necesita 15 horas de fabricación y 5 de pintura; la terminación en titanio necesita 17 horas de fabricación y 8 de pintura; y la terminación en acero necesita 20 horas en fabricación y 12 de pintura.

1. **Representar la información anterior en dos matrices.**
2. **Hallar una matriz que exprese las horas de fabricación y de pintura empleadas en cada modelo A y B.**

EJERCICIO 8.- Para qué valores de α y β son inversibles las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \beta - 1 & 2 \\ 2 & 3 & \beta + 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 9.- Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 10.- Un corredor de bolsa vendió a un cliente 200 acciones de la empresa A, 300 acciones de la empresa B, 500 acciones de la empresa C y 250 acciones de la empresa D. Los precios por acción de A, B, C y D son 100, 150, 200 y 300 euros, respectivamente.

- **Elaborar una matriz fila que represente el número de acciones que el cliente compró de cada una de las empresas y presentar una matriz columna que indique el precio por acción de cada una de ellas.**
- **Utilizando multiplicación de matrices, obtener el costo total de las acciones.**

EJERCICIO 11.- ¿Es verdad siempre que si A, B y C son matrices tales que $AB = AC$, entonces necesariamente $B = C$? Utilizar las siguientes matrices para obtener una respuesta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 12.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

$$(a) \quad AX - 3B = 2C \, , \quad (b) = XA - 3B = 2C$$

EJERCICIO 13.- Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 2$ y $|B| = -3$. Calcular,

$$(a) \quad |5A| \, , \quad (b) \quad \left| \frac{B}{3} \right| \, , \quad (c) \quad |-A| \, , \quad (d) \quad |BA^tB| \, , \quad (e) \quad |A^{-1}BA| \, , \quad (f) \quad \left|(A^3B^2)^t\right|$$

EJERCICIO 14.- Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 15.- Resolver la ecuación,

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

EJERCICIO 16.- Hallar las matrices adjuntas e inversas de las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 17.- Determinar el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 18.- Calcular el rango de las matrices según el valor del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ a & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 4 & a \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 19.- Determinar el valor de los parámetros a y b para que el rango de las siguientes matrices sea 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$$