Doble Grado en Derecho y en Administración y Dirección de Empresas
Matemáticas I. Curso 2018 - 2019

# RELACIÓN 2: DERIVACIÓN DE FUNCIONES

**EJERCICIO 1.- Aplicando la definición, calcular la función derivada de las siguientes funciones:**

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}\,; \qquad (b) \quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,; \qquad (c) \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x}\,;$$

**EJERCICIO 2.- Dada la función $f(x) = |x^2-1|$, hallar las derivadas laterales en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ ¿En cuáles de estos puntos $f$ es derivable?**

**EJERCICIO 3.- Estudiar la derivabilidad y la continuidad de las siguientes funciones. Calcular sus respectivas funciones derivadas en los puntos en que sea posible:**

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1+x & \textbf{si} \quad x < 0 \\ x & \textbf{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2-x & \textbf{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 3x - x^2 & \textbf{si} \quad x \ge 2 \end{cases} \qquad (b) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \textbf{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \textbf{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x+4 & \textbf{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + 1 & \textbf{si} \quad x \le 0 \\ e^{x(1-x)} & \textbf{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x & \textbf{si} \quad 1 < x \end{cases} \qquad (d) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} + x + 1 & \textbf{si} \quad x < -1 \\ \frac{1-x}{2} & \textbf{si} \quad -1 \le x < 1 \\ sen\,(\pi(x-1)) & \textbf{si} \quad 1 \le x < 2 \\ \pi(2-x) & \textbf{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

**EJERCICIO 4.- Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$, hallar los puntos de su gráfica en los que la pendiente es igual a 2.**

**EJERCICIO 5.- El número de individuos infectados por una enfermedad en la semana $t$ viene dado por la función $f(t) = 10000 - 4500(t^{-1/2}+1)$.**

1. **Calcular el número de enfermos en la primera semana.**
2. **Encontrar la velocidad de propagación de la enfermedad en la semana novena.**
3. **Encontrar la velocidad de propagación de la enfermedad en la semana 50.**

**EJERCICIO 6.- Se va a urbanizar cierta zona en los alrededores de Jaén y se ha estimado que su población dentro de $t$ años vendrá dada por la función $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ cientos de personas.**

1. **¿A qué ritmo cambia la población con respecto al tiempo?**
2. **¿A qué ritmo crecerá la población de la urbanización dentro de un año?**

3. **¿cuánto crecerá realmente la población durante el segundo año?**
4. **¿A qué ritmo crecerá la población de la urbanización dentro de 5 año?**
5. **¿Qué ocurrirá a la larga con el ritmo de crecimiento de la población?**

**EJERCICIO 7.- El coste total mensual de la fabricación de $q$ unidades de cierto modelo de coche viene dado por $C(q) = 3q^2 + q + 5000$ euros. Actualmente se están fabricando 40 coches al mes.**

1. **Usando el análisis marginal estimar el coste de fabricación si se aumenta la producción en un coche al mes.**
2. **¿Cuál es el coste real de aumentar la producción en un coche al mes?**

**EJERCICIO 8.- Se estima que la producción mensual de cierta fábrica viene dada por la función $f(x) = -x^2 + 2000x$ unidades, siendo $x$ el número de empleados de la fábrica, que en la actualidad son $53$.**

1. **Usando el análisis marginal, ¿qué efecto tendrá en la producción mensual la contratación de un nuevo trabajador?**
2. **¿Cuál será el cambio real en la producción?**

**EJERCICIO 9.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados:**

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{1+x^2} \ \textbf{en} \ (0,1)\,; \quad (b) \quad f(x) = \frac{1}{2x^2} \ \textbf{en} \ \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

**EJERCICIO 10.- Dada $f(x) = \frac{x^2+x+a}{3x+1}$, calcular el valor de $a$ para que la recta tangente a su gráfica en $x = 2$ sea paralela al eje de abscisas.**

**EJERCICIO 11.- Hallar las derivadas de las siguientes funciones:**

$(a) \quad f(x) = \sqrt{Ln\,(x)}$ $\qquad (b) \quad f(x) = e^{x^2+\textbf{sen}\,(x^3+1)}$

$(c) \quad f(x) = artan\,(\textbf{sen}\,(x))$ $\qquad (d) \quad f(x) = Ln\,(x^3 - 2x + 1)$

$(e) \quad f(x) = \textbf{sen}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ $\qquad (f) \quad f(x) = (x^2+1)\,\frac{\textbf{cos}\,x}{x^2}$

$(g) \quad f(x) = Ln\,(\textbf{sen}\,(2x - x^2)^3)$ $\qquad (h) \quad f(x) = 1 - \frac{1}{\tan^2 x}$

$(i) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{cosx}$ $\qquad (j) \quad f(x) = x^x$

$(k) \quad f(x) = e^{2x}\,arcsen\,(3x^2)$ $\qquad (l) \quad f(x) = x^2\,arctan\,(x^2+1)$

$(m) \quad f(x) = sen\,(x^2)\,cos\,(x^2)$ $\qquad (n) \quad f(x) = x\,tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

**EJERCICIO 12.- Un estudio realizado por un exportador de aceite de oliva virgen extra ha estimado que la demanda semanal (en miles de litros) de este producto en cierto país europeo viene dada por la función $D(p) = \frac{5000}{p^2}$, siendo $p$ el precio del litro en euros. En dicho estudio se ha estimado también que el precio dentro de $t$ semanas vendrá dado por la función $p(t) = 0.03t^2 + 0.02t + 4$. ¿Crece o decrece la demanda dentro de 10 semanas? ¿A qué ritmo?**

**EJERCICIO 13.- En cierta fábrica, el coste de producir $q$ unidades viene dado por la función $C(q) = 0.2q^2 + 2q + 200$ euros. La experiencia indica que durante las primeras $t$ horas del proceso se fabrican $q(t) = t^2 + 20t$ unidades. Hallar la variación del coste respecto al tiempo dos horas después de comenzar el proceso de producción.**

**EJERCICIO 14.- El coste total de fabricación de $q$ unidades de cierto artículo viene dado por la función $CT(q) = 3q^2 + 2q + 50$**

1. **Sabiendo que el coste medio viene dado por $CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$ , ¿para qué valor de $q$ es mínimo el coste medio?**

2. **Sabiendo que el coste marginal es la derivada del coste total, ¿para qué valor de $q$ son iguales el coste medio y el coste marginal?**

**EJERCICIO 15.- Aplicando la regla de la cadena calcular la derivada de $f$ respecto a la variable $t$ en los casos siguientes:**

$$(a) \quad \begin{cases} f(x) = x^3 + 5x^2 \\ \\ x(t) = t + Ln\,(t) \\ t = 1 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2+1} \\ \\ x(t) = t - cos\,(3t) \\ t = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ \\ x(u) = \frac{u-1}{u+1} \\ \\ u(t) = Ln(t) \\ t = 1 \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ \\ x(u) = \sqrt{u+1} \\ \\ u(t) = t^2 \\ t = 1 \end{cases}$$

**EJERCICIO 16.- Calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ de las funciones,**

$$(a) \quad f(x) = cos\,(2x)\,; \quad (b) \quad f(x) = Ln\,(1-x)\,; \quad (c) \quad f(x) = x^2\,e^{2x}\,; \quad (d) \quad f(x) = \frac{1 + sen\,(x)}{cos\,(x)}$$

**EJERCICIO 17.- Representar las siguientes funciones:**

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad (b) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \quad (c) \quad f(x) = \frac{1}{x}\,e^x$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}} \quad (e) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (f) \quad f(x) = x + \frac{4}{x-2}$$

**EJERCICIO 18.- Calcular los siguientes límites:**

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\mathbf{sen}\,(x)}{x-\mathbf{sen}\,(x)} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\mathbf{sen}\,(x)} \qquad (c)\quad \lim_{x\to 0} x\,Ln(x)$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 0}(\mathbf{sen}\ (x))^{x} \qquad (e)\quad \lim_{x\to\infty}(1-3^{1/x})\,x \qquad (f)\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+4}$$

**EJERCICIO 19.- Hallar los siguientes límites:**

$$\textbf{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^2} \qquad \textbf{(b)}\quad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}} \qquad \textbf{(c)}\quad \lim_{x\to 0^+} x^2(\ln(x))$$

$$\textbf{(d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\mathbf{cos}\,(x))}{x^2} \qquad \textbf{(e)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{sen}\,(5x)\,\mathbf{sen}\,(7x)}{(x-x^2)^2} \qquad \textbf{(f)}\quad \lim_{x\to 0}(\mathbf{cos}\,(3x))^{\frac{1}{x^3}}.$$

**EJERCICIO 20.- Considerar la función,**

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+1$$

1. **Estudiar los máximos, mínimos, puntos de inflexión, e intervalos de crecimiento y decrecimiento.**
2. **Calcular el valor que toma la función en los máximos, mínimos y puntos de inflexión.**

**EJERCICIO 21.- Un agricultor estima que si planta 50 olivos por hectárea, cada olivo producirá 60 kilos de aceitunas al año. Si por cada olivo adicional que planta por hectárea la producción anual disminuye en un kilo, ¿cuántos olivos debe plantar cada año para optimizar la producción por hectárea?¿Cuál es esa producción óptima?**

**EJERCICIO 22.- Una editorial que concede un importante premio a nivel nacional, sabe que el coste de editar cada libro es de** 5 € **y que ofertándolos a un precio de** 20 € **por ejemplar venderá,** 200 **ejemplares por semana. La editorial se plantea rebajar el precio para estimular las ventas y ha estimado que por cada euro que rebaje el precio de cada libro venderá** 45 **libros más. ¿A qué precio deberá vender el libro para obtener el mayor beneficio posible?**

**EJERCICIO 23.- Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función definida por**

$$f:\left[-1,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}\,;\qquad f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}.$$

**EJERCICIO 24.- Supongamos que el coste total de fabricación de** $x$ **artículos viene dado por la función** $C(x)=3x^2+x+48$ **euros.**

1. **¿Cuál es el coste de fabricación de** 20 **artículos?**

2. **¿Cuál es el coste de fabricación del vigésimo artículo?**
3. **Hállese el coste de fabricación medio por artículo como función de $x$**
4. **¿Para qué valor de $x$ es mínimo el coste medio?**
5. **¿Para qué valor de $x$ es el coste medio igual al coste marginal?**

**EJERCICIO 25.- El número de consumidores, $n$ (en miles), de cierto producto depende del precio $p$, según la función $n(p) = \frac{1000p}{1000+p^3}$**

1. **Dibuja la gráfica de la función y da una interpretación de la misma.**
2. **Calcula cuál es el precio óptimo para conseguir el número máximo de clientes.**