Doble Grado en Derecho y Administración y Dirección de Empresas
Matemáticas I. Curso 2018 - 2019

RELACIÓN 1: FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

EJERCICIO 1.- Obtener el dominio de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad (b) \quad f(x) = Ln(1-x^2)$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{1}{Ln\,(1-x^2)} \qquad (d) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$(e) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-x^2+x+6}} \qquad (f) \quad f(x) = e^{\frac{2x-3}{x}}$$

EJERCICIO 2.- Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ **y** $g(x) = x^2 - 1$,

1. **Obtener el dominio de ambas funciones.**
2. **Obtener, si es posible,** $f \circ g$ **y** $g \circ f$
3. **Calcular las siguientes expresiones:**

$$(a) \;\; g(f(0))\,; \quad (b) \;\; g(f(1))\,; \quad (c) \;\; f^{-1}\,; \quad (d) \;\; (g \circ f)^{-1}\,; \quad (e) \;\; (g \circ f)^{-1}(-2)$$

EJERCICIO 3.- Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{6-x^2}{x}$ **y** $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$**, calcular** $(f \circ g)(x)$ **y** $(g \circ f)(x)$.

EJERCICIO 4.- Dadas las funciones $f(x) = x^2 - x + 1$**, y** $g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$**, comprobar que una cualquiera de ellas es inversa de la otra.**

EJERCICIO 5.- Un autor escribe un libro y estudia las ofertas que le hacen dos editoriales, A y B, para publicarlo. La editorial A espera obtener un beneficio de 5 € por libro vendido y le propone pagarle un 10% del beneficio por los primeros 25.000 ejemplares vendidos y el 15% del beneficio por los que superen dicha cifra. La editorial B espera un beneficio de 6 € por ejemplar vendido y le propone no pagarle nada por los primeros 5.000 ejemplares vendidos y darle el 15% del beneficio por los que excedan de los 5.000 iniciales.

1. **Si el autor espera vender 10.000 ejemplares, ¿con quién debe hacer el contrato?**
2. **¿Y si espera vender 90.000 ejemplares?**
3. **Obtener la función que expresa la editorial elegida para vender** x **ejemplares.**
4. **¿Para qué valor de** x **son indiferentes ambas editoriales?**

EJERCICIO 6.- Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es x euros, su beneficio diario será de $B(x) = -10x^2 + 100x - 210$ euros.

1. **Representar la función precio-beneficio.**
2. **¿A qué precio debe vender cada caja para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio?**
3. **Determinar a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.**

EJERCICIO 7.- Dadas $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ y $g(x) = x^2 + 1$, calcular:

$$(a)\ \lim_{x\to 1} f(x)\,; \quad (b)\ \lim_{x\to 1} g(x)\,; \quad (c)\ \lim_{x\to 1} (f(x)+g(x))\ ; \quad (d)\ \lim_{x\to 1} (f(x).g(x))$$

$$(6)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\ ; \quad (f)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\ ; \quad (g)\ \lim_{x\to 1}(g(x)-1)^{f(x)}\ ; \quad (h)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)}$$

EJERCICIO 8.- Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+2x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3-2x}\right)^{3x^2}$ **(e)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+x-1}{x^3+x^2+x-2}\right)^{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ **(h)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x^4-3x^3+x}\right)^{\frac{3}{x}}$ **(i)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[\mathbf{cos}\,\left(x^2+x\right).\frac{x^2+x}{x^3-x^2+1}\right]$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+1} - x^{3/2}\right)$ **(k)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+x^3+x-1}{7x^5-x+2}$ **(l)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^3-3x^2+2x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x^{3/2}} - x^{3/2}\right)$ **(n)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{Ln(x)}{x^3-x}$ **(o)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+x^3}{Ln(x)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(3x^3+x^2+3\right)$ **(q)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+2}\right)^{tag\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$ **(r)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

EJERCICIO 9.- Un coche nos costó 18000 €, y se estima que cada año su valor se deprecia un 15%. Calcular su valor al cabo de un año, de tres años y de veinte años.

EJERCICIO 10.- Se sabe que el número de clientes de una empresa aumenta un 20% cada mes.

1. **Si inicialmente tenemos C_0 clientes, calcular cuántos tendremos a los dos meses.**
2. **Determinar cuál es la función C_t, que proporciona el número de clientes de la empresa en el mes t.**

3. **Si inicialmente contamos con 200 clientes, calcular cuántos tendremos a los 4 meses. Calcular cuántos meses han de transcurrir para que alcancemos los 500 clientes.**

EJERCICIO 11.- Cierta empresa dispone de un fondo de pensiones para sus trabajadores que acumula incialmente 10 millones de euros. Debido a una mala gestión, cada año las reservas en el fondo se reducen un 1.6% ¿Qué cantidad quedará dentro de 20 años? ¿Cuántos años han de transcurrir para que el fondo se reduzca a la mitad?

EJERCICIO 12.- El coste en euros para reducir en un p% la contaminación producida por cierta empresa viene dado por la función:

$$C(p) = \frac{80000p}{100-p} \qquad \textbf{con} \qquad 0 \leq p < 100$$

1. **Calcular el coste de reducir la contaminación en un 15% y en un 50%**
2. **¿Se podría reducir en un 100% la contaminación?**

EJERCICIO 13.- En cierta imprenta, el coste de impresión de un ejemplar de un libro, C, dado en euros, depende del número de volúmenes encargados, x, y viene dado por la función,

$$C(x) = \frac{2x^2 + 200x + 5200}{x^2 + 100}$$

que es decreciente para $x \geq 2$, es decir, a más volúmenes encargados menor es el coste por unidad.

1. **Calcular cuál es el coste que podemos conseguir imprimiendo grandes cantidades de ejemplares.**
2. **¿Cuántos ejemplares hemos de imprimir para que el coste por unidad sea 2€ más que el mínimo calculado en el apartado anterior?**

EJERCICIO 14.- Se ha estimado que el precio (en euros) que alcanzará cierto modelo de calculadora, que se está introduciendo en el mercado, dentro de x meses viene dado por la función,

$$p(x) = 40 + \frac{30}{x+1}$$

1. **¿Cuál será el precio dentro de 6 meses?**
2. **¿Cuándo será el precio de 43€?**
3. **¿Qué le sucederá a la larga al precio?**

EJERCICIO 15.- En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador en prácticas viene dado por la función, $M(t) = \frac{30t}{t+4}$, donde t representa los días.

1. **¿Cuántos montajes hacen el primer día? ¿Y el décimo?**
2. **¿Qué ocurre con el número de montajes si las prácticas se alargan indefinidamente?**

EJERCICIO 16.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En los casos de discontinuidad indicar de qué tipo es dicha discontinuidad:

(**a**) $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^4-x}{3x^2-x}\right)^{\frac{2}{x}} & \textbf{si} \quad x < 0 \\ e^{x-6} & \textbf{si} \quad 0 \leq x < 6 \\ x-5 & \textbf{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$

(**b**) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \textbf{si} \quad x < 1 \\ 1 & \textbf{si} \quad x = 1 \\ Ln\,(x) & \textbf{si} \quad 1 < x < 3 \\ e^x & \textbf{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$

(**c**) $f(x) = \begin{cases} x\,\mathbf{cos}\left(\frac{1}{x}\right) & \textbf{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \textbf{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ e^x & \textbf{si} \quad 1 < x \leq ln\,(5) \\ 5 & \textbf{si} \quad ln\,(5) < x \end{cases}$

(**d**) $f(x) = \begin{cases} Ln(x) & \textbf{si} \quad 0 < x < 1 \\ sen\,(\pi.x) & \textbf{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ x/2 & \textbf{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3/2 & \textbf{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$

EJERCICIO 17.- Determinar los valores de los prámetros a, b y c, para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio de definición.

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{cos}\,(x) & \textbf{si} \quad x < 0 \\ ax^2+bx+c & \textbf{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 6 & \textbf{si} \quad x = 1 \\ ax^2+bx+c & \textbf{si} \quad 1 < x < 3 \\ 7(x+1) & \textbf{si} \quad x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1 & \textbf{si} \quad 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c & \textbf{si} \quad |x-2| \geq 1 \end{cases}$$