# UNIDAD I

# A modo de repaso. Preliminares

## 1 Conjuntos numéricos. Operaciones. Intervalos

### 1.1 Conjuntos numéricos

Los números se clasifican de acuerdo con los siguientes conjuntos:

- **Números naturales.-** Son los elementos del conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- **Números enteros.-** Son los elementos del conjunto
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$
- **Números racionales.-** Son los elementos del conjunto
$$\mathbb{Q} = \{p/q, \text{ siendo } p, q \in \mathbb{Z}\}.$$
Los números racionales suelen denominarse también fracciones.
- **Números irracionales.-** Son aquellos que no se pueden expresar en forma de fracción. Así, por ejemplo, $\sqrt{2} = 1'414213\ldots$, $e = 2'718281\ldots$ y $\pi = 3'141592\ldots$ son números irracionales.
- **Números reales.-** Es el conjunto formado por los números racionales y los irracionales. El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.
- **Números complejos.-** Son los elementos del conjunto
$$\mathbb{C} = \{a + bi, \text{ siendo } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\}.$$

En el número complejo $a + bi$, $a$ se llama **parte real**; $b$ es la **parte imaginaria**, e $i$ es la **unidad imaginaria**.

Así, los conjuntos numéricos se contienen de acuerdo con la secuencia

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Si clasificamos los números en **enteros** y **decimales**, la correspondencia con los conjuntos anteriores es la siguiente:

- **Enteros positivos**. Son los números naturales.
- **Decimales con un número finito de cifras decimales o con infinitas cifras decimales periódicas.** Son los números racionales.
- **Decimales con infinitas cifras decimales no periódicas.** Son los números irracionales.

---

**Ejemplo 1.1**

**(a)** $1'017$ *es un número racional porque* $1'017 = \dfrac{1.017}{1.000}$.

**(b)** $2'\widehat{35}$ *es un número racional. En efecto, si llamamos* $x = 2'\widehat{35} = 2'3535\ldots$, *entonces*

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 235'3535\ldots \\ -\quad x & = & 2'3535\ldots \\ \hline 99x & = & 233. \end{array}$$

*Por tanto,* $2'\widehat{35} = \dfrac{233}{99}$.

**(c)** $1'023567834567239\ldots$ *es un número irracional porque no se puede expresar en forma de fracción.*

---

## 1.2 Operaciones con fracciones

### ■ Fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si expresan la misma cantidad, es decir, si $a \cdot d = c \cdot b$. Así, por ejemplo, las fracciones

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{4}, \ \frac{3}{6}, \ \frac{-4}{-8} \ \text{ y } \ \frac{-5}{-10}$$

son todas equivalentes entre sí.

Una fracción es **irreducible** si el numerador y el denominador son números primos entre sí, es decir, no tienen factores comunes. Así, las fracciones $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{11}$ son irreducibles. Sin embargo, la fracción $\frac{4}{10}$ no es irreducible ya que 4 y 10 no son primos entre sí. De hecho la fracción irreducible equivalente a $\frac{4}{10}$ es $\frac{2}{5}$.

### ■ Comparación de fracciones

Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se dice que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a \cdot d \leq b \cdot c$$
$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a \cdot d \geq b \cdot c.$$

Análogas definiciones se tienen para el caso en que las desigualdades son estrictas. Así, $\frac{2}{5} < \frac{4}{9}$ ya que $2 \cdot 9 < 5 \cdot 4$.

Cuando se trata de ordenar en orden creciente o decreciente una serie de números racionales lo más efectivo es expresar dichos números racionales mediante fracciones con igual denominador y a continuación comparar los numeradores. Veamos el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 1.2** *Ordenar en orden creciente las fracciones:*

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{7}{9}, \quad \frac{5}{12} \quad y \quad \frac{13}{30}.$$

En primer lugar calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 4 &= 2^2 \\ 9 &= 3^2 \\ 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

Así, el mínimo común múltiplo, que sabemos se obtiene como el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, es $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. A continuación expresamos las fracciones consideradas mediante fracciones equivalentes con denominador 180. Entonces

$$\frac{1}{2} = \frac{90}{180}, \quad \frac{3}{4} = \frac{135}{180}, \quad -\frac{7}{9} = -\frac{140}{180}, \quad \frac{5}{12} = \frac{75}{180} \quad \text{y} \quad \frac{13}{30} = \frac{78}{180}.$$

De esta forma, comparando los numeradores, concluimos que

$$-\frac{7}{9} < \frac{5}{12} < \frac{13}{30} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}.$$

## ■ Suma y resta de fracciones

- La suma (resta) de fracciones con igual denominador produce una fracción en la que el denominador es el mismo y el numerador es la suma (resta) de los numeradores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{5}.$$

- Para sumar (restar) fracciones con distinto denominador, transformamos las fracciones en otras equivalentes con denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores. A continuación se opera según lo dicho antes para la suma y resta de fracciones con igual denominador. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16}{24} - \frac{21}{24} = -\frac{5}{24}.$$

## ■ Producto de fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene, por numerador, el producto de los numeradores y, por denominador, el producto de los denominadores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}.$$

## ■ División o cociente de fracciones

El cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene, por numerador, el producto del primer numerador por el segundo denominador y, como denominador, el producto del primer denominador por el segundo numerador. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}.$$

## ■ Regla de tres simple

La regla de tres simple es una aplicación clásica de los problemas de proporcionalidad. Se puede distinguir entre regla de tres simple **directa** y regla de tres simple **inversa**. Su planteamiento general es el siguiente:

- **Directa:** Si a $a$ le corresponde $b$ y un aumento de $a$ implica un aumento de $b$, entonces a una cantidad $a'$ le corresponderá una cantidad $x$ que viene dada por:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b \cdot a'}{a}.$$

- **Inversa:** Si a $a$ le corresponde $b$ y un aumento de $a$ implica una disminución de $b$, entonces a una cantidad $a'$ le corresponderá una cantidad $x$ que es dada por:

$$\frac{a}{a'} = \frac{x}{b} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b \cdot a}{a'}.$$

---

**Ejemplo 1.3** *Un empresario agrícola sabe que, como término medio, 5 personas recogen la aceituna de 40 olivos en un día de trabajo. Si el empresario dispone de 6.000 olivos y desea que la recolección se lleve a cabo en 50 días, ¿cuántos trabajadores tendrá que contratar?*

Si se pretende que la recolección de los 6.000 olivos se haga efectiva en 50 días, entonces habrá que recoger diariamente la aceituna correspondiente a $\frac{6.000}{50} = 120$ olivos. Por tanto tendremos que plantear la siguiente regla de tres directa:

$$\begin{array}{rcl} 40 \text{ olivos} & \longrightarrow & 5 \text{ personas} \\ 120 \text{ olivos} & \longrightarrow & x \text{ personas} \end{array}$$

Luego

$$\frac{40}{120} = \frac{5}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5 \cdot 120}{40} = 15 \text{ personas}.$$

---

## 1.3 Potencias

La potencia $n$-ésima de un número real $a$ se escribe como $a^n$ y se define:

$$\begin{cases} a^n &= \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n \text{ veces}} \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 1. \\ \\ a^0 &= 1. \end{cases}$$

Si $a$ y $b$ son números reales y $m$ y $n$ son números naturales, entonces se tienen las siguientes propiedades:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, si $a \neq 0$.

**Ejemplo 1.4**

**(a)** $3^3 \cdot (-2)^3 = [3 \cdot (-2)]^3 = (-6)^3 = -216.$

**(b)** $(2^2)^{-3} \cdot 2^3 = 2^{-6} \cdot 2^3 = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}.$

**(c)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}.$

**(d)** $\dfrac{8^{-2}}{5^{-2}} = \left(\dfrac{8}{5}\right)^{-2} = \left(1 : \dfrac{8}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{8}\right)^2 = \dfrac{25}{64}.$

Por otra parte, son también muy utilizadas las fórmulas

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad \text{y} \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Sin embargo, debe quedar claro que

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n \quad \text{cuando } n > 1.$$

Lo mismo es cierto cambiando la suma por la resta.

## 1.4 Raíces

Consideremos la raíz $\sqrt[n]{a^m}$ con $a \in \mathbb{R}^+$ si $n$ es par, y $a \in \mathbb{R}$ si $n$ es impar. Al número natural $n$ (distinto de cero) se le llama **índice** de la raíz.

Resulta de gran utilidad la identidad

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

ya que así una raíz podemos considerarla como una potencia con exponente fraccionario.

### ■ Producto y cociente de raíces

- De igual índice:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^p} &= \sqrt[n]{a^m \cdot b^p} \\ \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^p}} &= \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^p}}. \end{aligned}$$

- De distinto índice: Si consideramos, por ejemplo, el producto

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{m/n} \cdot b^{p/q},$$

calcularíamos fracciones equivalente a $m/n$ y $p/q$ de manera que tengan el mismo denominador. Así, el problema se reduce al producto de raíces con el mismo índice. Para el cociente de raíces con distinto índice se actúa de manera completamente análoga.

**Ejemplo 1.5**

**(a)** $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 10} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}.$

**(b)** $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5^{2/3} \cdot 3^{1/2} = 5^{4/6} \cdot 3^{3/6} = \sqrt[6]{5^4} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{5^4 \cdot 3^3}.$

### ■ Suma y recta de raíces

Como ocurría en las potencias, es fundamental observar que

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}.$$

Así, las únicas sumas o rectas de raíces que podremos llevar a cabo serán del tipo

$$c\sqrt[n]{x} + d\sqrt[n]{x} = (c+d)\sqrt[n]{x}.$$

■ **Potencia y raíz de una raíz**

Se tienen las siguientes propiedades:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{(a^m)^p} = \sqrt[n]{a^{m\cdot p}} \tag{I.1}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n\cdot p]{a^m}. \tag{I.2}$$

---

**Ejemplo 1.6** *Simplifica la expresión* $\sqrt[3]{\sqrt{x^9y^7}}\left(\dfrac{xy}{\sqrt[3]{y}}\right)^6$.

En primer lugar observar que

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^9y^7}} = \sqrt[6]{x^9y^7} = xy\sqrt[6]{x^3y},$$

donde la primera igualdad se obtiene utilizando la propiedad (I.2). Por otra parte,

$$\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{y}}\right)^6 = \frac{x^6y^6}{(\sqrt[3]{y})^6}$$

y por la propiedad (I.1), $(\sqrt[3]{y})^6 = \sqrt[3]{y^6} = y^2$. Por tanto,

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^9y^7}}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{y}}\right)^6 = xy\sqrt[6]{x^3y}\left(\frac{x^6y^6}{y^2}\right) = \frac{x^7y^7\sqrt[6]{x^3y}}{y^2} = x^7y^5\sqrt[6]{x^3y}.$$

---

## 1.5 Intervalos de la recta real

Dentro del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales unos subconjuntos destacados que juegan un importante papel en el estudio del Cálculo Infinitesimal son los intervalos. Se distinguen los siguientes tipos de intervalos:

- **Intervalo abierto.-** $(a,b) = ]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado.-** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$.
- **Intervalo semiabierto.-**

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\} \quad \text{o} \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}.$$

- **Intervalos infinitos.-**

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\} \quad \text{o} \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}.$$

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\} \quad \text{o} \quad [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\}.$$

## 1.6 Ejercicios Propuestos

**Ejercicio 1.** *Indica a qué conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números:*

$$1'7, \quad -34, \quad 0'\widehat{35}, \quad 2'3565656\ldots, \quad \frac{45}{7}, \quad \sqrt{5} \quad y \quad 2+4i.$$

**Ejercicio 2.** *Escribe en forma de fracción irreducible los siguientes números decimales:*

**(a)** *2'75;* **(b)** *2'343434. . . ;* **(c)** *2'3565656. . . .*

**Ejercicio 3.** *Ordena en orden creciente los siguientes números:*

$$-\frac{5}{38}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{6}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{10}{12} \quad y \quad \frac{12}{15}.$$

**Ejercicio 4.** *Realiza las siguientes operaciones:*

$$\textbf{(a)}\ \frac{3}{4}-\frac{7}{2}+\frac{1}{9}; \qquad \textbf{(b)}\ \left(3-\frac{7}{5}\right)-\left(\frac{3}{4}-2\right); \qquad \textbf{(c)}\ \frac{1}{3}+\frac{2}{5}:\left(-1-\frac{3}{6}\right);$$

$$\textbf{(d)}\ \frac{\frac{1}{2}+3-\frac{3}{5}}{3-\frac{2}{5}:\frac{3}{7}}; \qquad \textbf{(e)}\ \frac{1}{\frac{2}{3+\frac{1}{5}}}-\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{4}}.$$

**Ejercicio 5.** *Tres amigos compran un décimo de lotería aportando 5, 7 y 8 euros, respectivamente. Si el décimo resultó premiado con 6.000 euros, ¿cómo habrán de repartirse el premio teniendo en cuenta lo aportado por cada uno en la compra del décimo?*

**Ejercicio 6.** *Se sabe que un albañil es capaz de levantar diariamente una pared de* $6\,m^2$*. Si deseamos cercar un solar de* $90\,m.$ *de perímetro con una pared de* $2\,m.$ *de alta y queremos que las obras se lleven a cabo en el plazo de 10 días, ¿cuántos albañiles tendremos que contratar?*

**Ejercicio 7.** *En una ciudad hay que efectuar modificaciones en la red eléctrica y sólo se dispone de cinco días. Si dos personas tardarían 35 días en realizar el trabajo, ¿a cuántos empleados habrá que contratar?*

**Ejercicio 8.**

**(a)** *Calcula el 7% de 6.000 euros*

**(b)** *Calcula el 18% de 3.500 euros.*

**(c)** *Si una entidad bancaria ofrece un interés anual del $2'75\%$ para una imposición a plazo fijo superior a 6.000 euros, ¿qué cantidad habrá que imponer a plazo fijo durante un año para que nos reporte unos intereses de 192.500 euros?*

**Ejercicio 9.** *Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:*

**(a)** $(3^2 + 5^2) = (3+5)^2$.

**(b)** $(3^2 \cdot 5^2) = (3 \cdot 5)^2$.

**(c)** $(3^2 - 5^2) = (3-5)^2$.

**(d)** $\left(\dfrac{3^2}{5^2}\right) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$.

**Ejercicio 10.** *Calcula:*

**(a)** $8^{-8} \cdot 8^6$; **(b)** $\dfrac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^2 \cdot 2^4}$; **(c)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^6 (-9)^6$;

**(d)** $\dfrac{3^2 + 3^3}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$; **(e)** $(2 \cdot 3)^{-5} \cdot 6^4 : \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2}$; **(f)** $\left(5 - \dfrac{x}{3}\right)^2$.

**Ejercicio 11.** *Simplifica las siguientes expresiones:*

**(a)** $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^{-5}}}$; **(b)** $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a^3 b^{-1}}}$; **(c)** $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[5]{a^{-2}}}$; **(d)** $\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a}$.

**Ejercicio 12.** *Simplifica las siguientes expresiones sacando factores fuera de las raíces:*

**(a)** $\sqrt[3]{\sqrt{x^5 y^8 z^{19}}}$; **(b)** $\sqrt[4]{\sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{x^2 y}}{z^4}\right)^3}}$.

**Ejercicio 13.** *Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:*

- *¿Pertenece el punto* $1'75$ *al intervalo* $(-1, 3)$*?*
- *¿Está el intervalo* $(-1, 3]$ *contenido en el intervalo* $[-1, +\infty)$*?*
- *¿Cuál es el intervalo dado por los puntos* $x \in \mathbb{R}$ *tales que* $x > 3$ *y* $x \leq 5$*?*
- *¿Cuál es el intervalo dado por los puntos* $x \in \mathbb{R}$ *tales que* $-1 \leq x$*?*
- *Expresa mediante la unión de dos intervalos el conjunto* $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ y } x \geq 6\}$.
- *Determina la intersección de los intervalos* $(-1, 7)$ *y* $[0, 8]$.