Práctica 6: Diagonalización de matrices

En esta práctica estudiaremos los comandos para el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz, lo que nos permitirá saber si una matriz es o no diagonalizable.

Diagonalización de matrices

Dada una matriz A cuadrada de orden n, diremos que es una matriz diagonalizable si existe una matriz P (cuadrada de orden n) regular tal que se cumple

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P,$$

donde D es una matriz diagonal. A la matriz P se le llama matriz de paso.

Llamaremos valor propio de A a cualquier número real $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ que verifique:

$$A \cdot v = \lambda\, v,$$

a este vector $\vec{v}$ se le conoce con el nombre de vector propio con valor propio λ.

Mathematica posee comandos para el cálculo de autovalores y autovectores de matrices cuadradas. Estos cálculos pueden realizarse en modo simbólico o numérico (exacto o aproximado, respectivamente).

El comando que usaremos para calcular los valores propios es:

Eigenvalues[*matriz*],

devuelve una lista con todos los autovalores de la *matriz*. El comando que nos permitirá calcular los vectores propios es:

Eigenvectors[*matriz*],

que nos devuelve una lista con los autovalores linealmente independientes de la *matriz*.

```
A = {{2, 0, -2}, {-3, -1, 2}, {2, 0, -2}};
B = {{0, 0, 0}, {0, 1, -2}, {0, -2, 1}};
```

```
Eigenvalues[A]
```

```
Eigenvectors[B]
```

Para encontrar los valores propios de una matriz cuadrada de orden n, en principio es necesario resolver una ecuación polinómica de grado n. Así, como para $n \geq 5$ no podemos obtener, en general, las soluciones exactas de una ecuación polinómica, se tiene ahora que tampoco podremos obtener de forma exacta los valores y vectores propios de una matriz cuadrada de orden mayor o igual que 5, salvo que la correspondiente ecuación polinómica tenga raíces fácilmente calculables.

Si los elementos de una matriz se expresan con números decimales, *Mathematica* encontrará aproximaciones numéricas de los valores y vectores propios.

```
Eigenvalues[{{1, 1, 1.2}, {0.3, 1, 2}, {2, 2.5, 0}}]
```

Para determinar si una matriz es o no diagonalizable se utilizarán los resultados vistos en teoría. Así, la matriz B anterior será diagonalizable ya que tiene 3 valores propios distintos y es de dimensión 3. Para ver si la matriz A es diagonalizable tendremos que ver si hay una base de vectores propios de A.

```
Eigenvectors[A]
```

La matriz A no es diagonalizable puesto que sólo se pueden obtener 2 vectores propios de A linealmente independientes.

La matriz diagonal D semejante a la matriz B tiene como elementos de la diagonal principal a los valores propios de B. Otra forma de obtener la matriz D es mediante el producto $P^{-1}.B.P$, donde P es la matriz de paso que tiene por columnas a los vectores propios de B.

```
P = Transpose[Eigenvectors[B]]
```

```
Inverse[P].B.P // MatrixForm
```

Ejercicios

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, estudia si el vector (0, 0, 1) es vector propio de A.

2. Calcular todos los valores y vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si 2 es valor propio de la matriz A.

b) ¿Son (1, 1, 1) y (0, 0, 1) vectores propios de la matriz A? En caso afirmativo calcula el valor propio asociado.

c) ¿Es diagonalizable la matriz A?

4. Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables en función del parámetro a:

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular A^{20} a partir de la diagonalización de la matriz A.

6. Un estudio sobre la audiencia de tres canales de televisión muestra que los espectadores cambian de canal según la siguiente tabla:

□	Pasan al canal 1	Pasan al canal 2	Pasan al canal 3
Espectadores del canal 1	70 %	20 %	10 %
Espectadores del canal 2	10 %	80 %	10 %
Espectadores del canal 3	10 %	0	90 %

a) Expresar la evolución a lo largo del tiempo.

b) Si sabemos que el número de espectadores en miles viene dado por 150 del canal *A*, 50 del canal *B* y 250 del C. Calcular el número de espectadores de cada canal cuando haya transcurrido 10 años.

c) Si suponemos que los espectadores se comportan siempre de esta forma ¿cuántos espectadores de cada canal habrá al cabo de muchos años?