Práctica 5:
Sistemas lineales. Vectores

Uno de los problemas que más se plantea en los distintos campos de la ciencia es el de la resolución de sistemas de ecuaciones. Aunque el tema contemplado en el programa de teoría está referido exclusivamente al estudio de sistemas de ecuaciones lineales, los comandos que vamos a utilizar para su resolución también permiten resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

Como caso particular de sistema de ecuaciones tenemos la resolución de ecuaciones de una variable.

Sistemas de ecuaciones lineales

Trataremos de encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1\,n}\,x_{1\,n} = b_1$$
$$\ldots$$
$$a_{\mathrm{m}1}\,x_1 + a_{\mathrm{m}2}\,x_2 + \ldots + a_{\mathrm{mn}}\,x_{\mathrm{mn}} = b_m$$

Comando Solve

Este comando resuelve una ecuación o un sistema de ecuaciones y la salida incluye todas las soluciones posibles, caso de que existan. Su sintaxis es

Solve[{ecuación 1, ... , ecuación m}, {incógnita 1, incógnita 2, ... , incógnita n}]

Debe saberse que:

(1) El símbolo igual debe escribirse dos veces en cada ecuación.

(2) Si el sistema no tiene ninguna solución (sistema incompatible) el programa nos devolverá la salida "{}".

(3) Si el sistema tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado) nos dará un mensaje de error y nos devolverá las soluciones despejando unas incógnitas en función de las otras.

Veamos algunos ejemplos:

```
Solve[{x + y + z == 0, x - y + z == 2, x + 2 z == 4}, {x, y, z}]
```

En este caso la única solución es (–2, –1, 3).

```
Solve[{2 x + y == 3, y + 2 z == 1, x + y + z == 0}, {x, y, z}]
```

En este caso el sistema no tiene solución, es decir, es un sistema incompatible.

```
Solve[{2 x + y == 3, y + 2 z == 1, x + y + z == 2}, {x, y, z}]
```

Se trata de un sistema compatible indeterminado, con lo cual tenemos infinitas soluciones generadas por $(1+\lambda,\ 1-2\,\lambda,\ \lambda)$, siendo λ un número real.

Comando Reduce

Se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones que dependan de parámetros. Su sintaxis es

Reduce[{ecuación 1, ... , ecuación m}, {incógnita 1, incógnita 2, ... , incógnita n}]

Veamos algunos ejemplos:

Resolver el sistema siguiente, que depende del parámetro *a*

$$ax + y + z = a$$
$$x + ay + z = a^2$$
$$x + y + az = a^3$$

```
Reduce[{a*x + y + z == a, x + a*y + z == a^2, x + y + a*z == a^3}, {x, y, z}]
```

Debemos interpretar que si a = 1, el sistema es compatible indeterminado. Si a ≠ 1 y a ≠ -2, el sistema es compatible determinado. Si a = -2 el sistema es incompatible

Espacios vectoriales

Un espacio vectorial *V* sobre los números reales es un conjunto de vectores en el cual hay definida una operación suma y una operación producto por escalar.

Para trabajar con vectores los expresaremos en forma matricial, es decir, consideramos un vector como una matriz fila o columna. Por ejemplo:

```
v = {1, 2, 2};
```

Las operaciones con vectores se realizan de la misma manera que se vio en la práctica de matrices.

```
v1 = {0, 0, 1};
v2 = {-1, 2, 0};
v3 = {3, 2, -1};
```

```
v1 + v2
```

```
v3 - v2 + v1
```

```
3 v1 - 2 v2 + 5 v3
```

Combinación lineal. Dependencia e independencia lineal

Usando que un conjunto de vectores v_1, v_2, ..., v_k es *linealmente independiente* si la única solución de la ecuación $c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_k v_k = 0$ es la solución $c_1 = c_2 =. .. = c_k = 0$, podemos ver directamente si un sistema es linealmente independiente usando la orden **Solve**.

```
v1 = {1, 3, 1};
v2 = {1, 0, 2};
v3 = {1, 6, 0};
Solve[c1*v1 + c2*v2 + c3*v3 == {0, 0, 0}, {c1, c2, c3}]
```

como el sistema es compatible indeterminado tenemos infinitas soluciones. Con lo cual los vectores v1, v2, v3 son linealmente dependientes.

Otra forma sencilla de estudiar si el sistema es linealmente independiente o no, es estudiar el rango de la matriz que forma el sistema. El sistema será linealmente independiente cuando el rango coincida con el número de vectores.

Para ello utilizaremos el comando

MatrixRank[Matriz formada por los vectores]]

El resultado de evaluar este comando son todos los menores de la matriz del sistema de orden = número de vectores.
Veamos algunos ejemplos:

```
v1 = {2, 1, -2, 0};
v2 = {3, 2, -1, 1};
v3 = {0, 1, 4, 2};
s = {v1, v2, v3};
(*Nos genera la matriz cuyas filas son los vectores v1,v2 y v3*)
MatrixForm[s]
```

```
MatrixRank[s]
```

con lo cual los vectores son linealmente dependientes puesto que el rango es menor que el número de vectores.

```
v1 = {2, 1, -2, 0};
v2 = {3, 2, -1, 4};
v3 = {0, 2, 1, 0};
s = {v1, v2, v3};
MatrixForm[s]
```

```
MatrixRank[s]
```

En este caso, los vectores son linealmente independientes.

Sistema generador

Dado un sistema de vectores v_1, v_2, ..., v_k para calcular una base del subespacio que generan podemos utilizar dos métodos. El primero de ellos es utilizando la orden

RowReduce[M]

Supongamos un sistema generador formado por los vectores siguientes, y sea M la matriz que tiene por filas dichos vectores:

```
v1 = {2, 4, -2, 1};
v2 = {1, 0, -1, 2};
v3 = {-1, 4, 1, -5};
v4 = {0, 2, 1, 0};
v5 = {7, 0, -13, 5};
M = {v1, v2, v3, v4, v5};
```

```
RowReduce[M]
```

Esto nos dice que existen tres vectores linealmente independientes, por tanto, el espacio vectorial generado por v1, v2, v3 v4 y v5 tiene dimensión tres y una base suya estará formada por los vectores que se obtienen con el comando RowReduce, es decir,

$$\text{Base} = \left\{\left(1, 0, 0, \frac{7}{2}\right), \left(0, 1, 0, -\frac{3}{4}\right), \left(0, 0, 1, \frac{3}{2}\right)\right\}$$

La segunda forma de calcular la base sería con un proceso de eliminación de los que no sean linealmente independientes. El proceso a seguir es el siguiente :

1. Se toma un vector no nulo.
2. Añadimos un vector más y comprobamos si el sistema es linealmente independiente. Si el

sistema es linealmente independiente dejamos ese vector y si es linealmente dependiente lo eliminamos.

Y volvemos a repetir el paso 2 hasta que terminemos con todos los vectores.
Calculemos una base a partir del siguiente sistema de generadores:

```
v1 = {2, 4, -2, 1};
v2 = {1, 0, -1, 2};
v3 = {-1, 4, 1, -5};
v4 = {0, 2, 1, 0};
v5 = {7, 0, -13, 5};
```

```
s2 = {v1, v2};
MatrixRank[s2]
```

Como v1 y v2 son linealmente independientes no eliminamos v2 y añadimos v3:

```
s3 = {v1, v2, v3};
MatrixRank[s3]
```

2

Como v1, v2 y v3 son linealmente dependientes eliminamos v3 y añadimos v4:

```
s4 = {v1, v2, v4};
MatrixRank[s4]
```

Como v1, v2 y v4 son linealmente independientes dejamos v4 y añadimos v5:

```
s5 = {v1, v2, v4, v5};
MatrixRank[s5]
```

Así el sistema v1, v2, v4, v5 es linealmente dependiente y, por tanto, una base la formarían v1, v2 y v4.

Subespacio vectorial

Diremos que S es un subespacio vectorial de V si es cerrado para la suma y el producto por escalares, es decir, si verifica:

(1) Dados u, $v \in S$, se cumple que $u + v \in S$.

(2) Dado $u \in S$ y λ número real, se cumple que $\lambda\, u \in S$.

Dado un subespacio vectorial y una base suya, B = $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$, estudiaremos si otro vector, v, pertenece o no a dicho subespacio vectorial.
Para ello, escribiremos el sistema formado por los vectores de la base y el nuevo vector, v. Si dicho sistema es linealmente independiente el vector no pertenece al subespacio. Si el sistema es linealmente dependiente el nuevo vector sí pertenecerá al subespacio.

Veamos un ejemplo: sea un subespacio vectorial, S, cuya base está formada por

$$b1 = (2, 5, 1, 3),\ \ b2 = (10, 1, 5, 10),\ \ b3 = (4, 1, -1, 1)$$

```
b1 = {2, 5, 1, 3};
b2 = {10, 1, 5, 10};
b3 = {4, 1, -1, 1};
```

Comprobemos en primer lugar que se trata de una base, es decir, que son linealmente independientes :

```
M = {b1, b2, b3};
MatrixRank[M]
```

Veamos si los vectores u = (1, 1, 1, 1) y w = (8, 5, 7, 12) pertenecen al subespacio vectorial S

```
u = {1, 1, 1, 1};
w = {8, 5, 7, 12};
```

```
s1 = {b1, b2, b3, u};
MatrixRank[s1]
```

Los vectores son linealmente independientes, por tanto el vector u no pertenece al subespacio vectorial S.

```
s2 = {b1, b2, b3, w};
MatrixRank[s2]
```

En este caso los vectores son linealmente dependientes, por lo que w sí pertenece al subespacio vectorial S.

Ejercicios

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y+3z=1 \\ x+z=1 \end{array}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=1 \\ y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=5 \\ x-y+2z=1 \\ -x+z-t=0 \\ 5x+y-2z+3t=6 \end{array}\right\}$$

d)

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=-1 \\ y+z=0 \\ -x+2y+z=1 \end{array}\right\}$$

2. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales:

a)

$$\left.\begin{array}{r} x-y=a \\ x+a^2 z=2a+1 \\ x-y+a(a+1)z=2a \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ x+az=2 \\ 2x+y+2z=b \end{array}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \\ 2x-5y+az=-2 \end{array}\right\}$$

3. Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores:

a. $\vec{v_1}=(5, 3, 1)$, $\vec{v_2}=(0, -2, 7)$ y $\vec{v_3}=(15, 11, -4)$
b. $\vec{v_1}=(1, 0, 1, 1)$, $\vec{v_2}=(0, 1, 1, 0)$, $\vec{v_3}=(1, 1, -1, 1)$ y $\vec{v_4}=(0, 0, 3, 0)$
c. $\vec{v_1}=(1, 1, 1, 1)$, $\vec{v_2}=(3, 1, 3, 0)$, $\vec{v_3}=(5, 2, 3, 1)$ y $\vec{v_4}=(9, 4, 7, -1)$

4. Dados los vectores $\vec{v_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{v_2} = (-2, 0, -1)$ y $\vec{v_3} = (a, 1, b)$
¿Qué relación debe existir entre *a* y *b* para que los vectores sean linealmente independientes?

5. Sea el espacio vectorial S generado por los vectores $v_1 = (1, 2, 3, 4)$,
$v_2 = (1, 0, 1, -2)$, $v_3 = (3, 2, 5, 0)$ y $v_4 = (1, 4, 5, 6)$

a. Encontrar un base de S
b. Encontrar una base de S creada a partir de los vectores que lo generan.
c. Estudiar si los vectores $u1 = (-1, 2, 1, -2)$ y $u2 = (3, -2, 4, -3)$ pertenecen al subespacio S

6. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5€, respectivamente. Un día de recaudación conjunta de las tres salas fue de 720€ y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20€ más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

7. Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A, a 3€ las del tipo B y a 4€ las del tipo C, entonces obtiene un total de 20€. Pero si vende a 1€ las del tipo A, a 3€ las del tipo B y a 6€ las del C, entonces obtiene un total de 25€.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que relacione el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.

b) Estudia y resuelve dicho sistema.

c) ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas tiene que ser entero y positivo)