Práctica 4: Matrices

En esta práctica se describen algunas de las herramientas que posee *Mathematica* para la construcción y manipulación de matrices. Empezaremos analizando los comandos que permiten definirla para posteriormente trabajar con ellos y continuar con la obtención del determinante y del rango de una matriz, así como de las matrices inversas y transpuestas.

Construcción de matrices

Las matrices son ejemplos de listas o colecciones de objetos. Estos pueden ser números, constantes, expresiones u otras listas, y constituyen uno de los elementos más flexibles y poderosos de *Mathematica*.

Al igual que sucedía con las variables, es indiferente denominar una matriz con una letra o con una palabra (sin acentos), si bien el nombre no puede empezar por un número. Para ello basta expresar los diferentes elementos que las componen separados por comas y entre llaves.

```
M = {{1, 2, 0}, {2, 1, 2}, {2, 1, 1}} (*Matriz cuadrada con 3 filas y 3 columnas*)
```

Como puede observarse, las matrices construidas son devueltas en forma de lista. Para poder observar estas matrices en forma tabular puede usarse el comando

MatrixForm[Matriz]

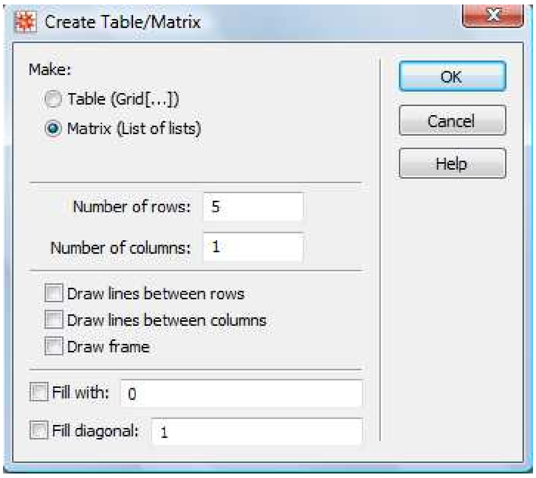
```
MatrixForm[M]
```

Otra forma de obtener el mismo resultado es poner **//MatrixForm** después del nombre de la matriz:

```
M // MatrixForm
```

A la hora de realizar operaciones con matrices no podemos trabajar con MatrixForm[*matriz*], hay que trabajar directamente con la *matriz*.

Para insertar una matriz podemos hacerlo como vimos en la práctica de *Introducción al Mathematica* en la opción **Insert** de la barra de herramientas tenemos la opción **Table/Matrix,** si pinchamos en **New** obtenemos la siguiente pantalla



Así, finalmente elegiremos el número de filas y columnas e introduciremos los elementos de la matriz.

También podemos insertar una matriz desde la paleta. La que tiene por defecto es de dimensión 2×2, pero podemos insertar filas pulsando al mismo tiempo CTRL+ENTER, y podemos insertar columnas pulsando al mismo tiempo CTRL+ "*coma*".

Otros comandos que permiten construir algunos tipos especiales de matrices son **DiagonalMatrix** e **IdentityMatrix**.

```
DiagonalMatrix[{π, π / 2, π / 4}] // MatrixForm (*Matriz diagonal cuya
  diagonal principal está formada por los elementos π,π/2 y π/4*)
```

```
MatrixForm[IdentityMatrix[5]] (*Matriz identidad de dimensión 5*)
```

Operaciones con matrices

Consideremos las siguientes matrices:

$$A1 = \left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}\right\};$$

```
A2 = {{1, 1, 1}, {1, 1, 1}, {1, 1, 1}};
A3 = {{1, 0}, {0, 0}, {0, 1}};
A4 = {0, 1, 0};
```

Observa que al definir las matrices A1, A2, y A3 hemos puesto un ";" al final de la línea, lo que hace que no las escriba en pantalla al procesar la correspondiente celda. Por otra parte, recuerda que *Mathematica* opera en modo simbólico, salvo que se indique lo contrario. Así, si queremos ver los elementos de la matriz A1 con decimales, debemos pedir el valor numérico:

```
N[A1]
```

Y si, además, queremos verla en forma matricial :

```
N[A1] // MatrixForm
```

O también :

```
A1 // N // MatrixForm
```

Suma de matrices

La suma de matrices se expresa mediante el operador "+". Veamos los siguientes ejemplos:

```
A1 + A2
```

```
A1 + A2 // MatrixForm
```

Observa la respuesta del programa cuando tratamos de sumar matrices con distintas dimensiones:

```
A2 + A3 // MatrixForm (*A2 tiene dimensión 3×3 y A3 tiene dimensión 3×2*)
```

Producto de escalar por matriz

La multiplicación de un **escalar** por un vector o matriz puede hacerse utilizando el operador * , dejando un espacio entre el escalar y la matriz o simplemente al escribir el escalar junto al nombre de la matriz *Mathematica* deja el correspondiente espacio de multiplicación. Veamos algunos ejemplos:

```
7 * A3
```

```
7 * A3 // MatrixForm
```

```
MatrixForm[7 A3]
```

en ambos casos obtenemos el mismo resultado.

Producto de matrices

Para multiplicar dos matrices hay que poner un punto ".". Si se deja un espacio o se pone el signo "*", lo que hace es multiplicar elemento a elemento los que ocupan la misma posición. A continuación realizamos diferentes operaciones, veremos que unas es posible efectuarlas y otras no.

```
A1.A2 (*Producto de las matrices A1 y A2*)
```

```
A1.A2 // MatrixForm
```

```
A1 * A2 (*Al utilizar el asterisco se multiplican los elementos
  que ocupan las mismas posiciones en las matrices A1 y A2*)
```

```
A3.A2 (*No es posible multiplicar la matriz A3 y la A2,
 por no ser igual el número de columnas de A3 y de filas de A2*)
```

El producto de una matriz cuadrada por sí misma *n* veces puede hacerse mediante el siguiente comando

MatrixPower[*matriz*,n]

que nos proporciona la potencia n-ésima de *matriz.*

```
MatrixPower[A2, 5] // MatrixForm
```

Inversa, transpuesta y determinante de una matriz

La inversa, transpuesta y el determinante de una matriz cuadrada se obtienen con las órdenes **Inverse[matriz]**, **Transpose[matriz]** y **Det[matriz]** respectivamente. Veamos algunos ejemplos, definiendo en primer lugar las matrices cuadradas de orden tres B1 y B2:

```
B1 = {{1, 0, 0}, {2, 2, 0}, {1, 0, 5}};
B2 = {{1, 0, 0}, {2, 1, 1}, {1, 1, 0}};
```

```
Inverse[B1] (*Inversa de la matriz A1*)
```

```
Inverse[B1] // MatrixForm
```

```
Transpose[B1] (*Transpuesta de B1*)
```

```
Transpose[B1] // MatrixForm
```

```
Det[B1]
```

```
MatrixForm[Inverse[B1].B1]
(*Comprobamos que B1 por su inversa es la matriz identidad*)
```

Rango de una matriz

Dada una matriz A, los menores de orden k de dicha matriz son los determinantes de todas las submatrices cuadradas de A que pueden construirse seleccionando k filas y k columnas de dicha matriz. Para calcular todos los menores de cierto orden de una matriz, *Mathematica* dispone del comando **Minors** cuya sintaxis se describe a continuación:

Minors[*matriz*,k]

que devuelve una matriz cuyos elementos son todos los menores de orden k de la *matriz,* es decir, los determinantes de las submatrices de orden k de la *matriz*. Veamos el siguiente ejemplo:

```
Minors[{{1, 2, 0}, {0, 0, 1}, {2, 4, 1}}, 2]
(*En este caso se han calculado todos los menores de orden 2
 de una matriz cuadrada de orden 3. El resultado es una matriz
 cuyos elementos son justamente esos 9 menores de orden 2*)
```

Obviamente el rango de una matriz podrá ser estudiado utilizando este comando hasta encontrar el mayor menor distinto de cero. Estudiamos el rango de la matriz M siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \end{pmatrix};$$

Al ser una matriz con 4 filas y 3 columnas el rango puede ser a lo sumo 3, por lo que empezamos calculando los menores de orden 3,

```
Minors[M, 3]
```

Al ser todos estos menores de orden 3 iguales a cero pasamos a estudiar los de orden 2

```
Minors[M, 2]
```

Se observa que hay menores de orden 2 distintos de cero y, por tanto, el rango de la matriz M es 2.

Si solamente nos interesa saber el rango de la matriz, sin hacer el estudio de los menors que son distitnos de cero, podemos hacerlo con la orden

MatrixRank[*matriz*]

Por ejemplo, en la matriz M anterior :

```
MatrixRank[M]
```

Ejercicios

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcula:

a) $3A + 2B$

b) $A B^t$

c) $\mathrm{Det}(A^t B^t)$

d) $A^{-1} B + A^t$

e) A^{127}

2. Demuestra, utilizando las matrices del ejercicio anterior, que no es cierta la propiedad conmutativa para el producto de matrices cuadradas.

3. Siendo A y B las matrices del **ejercicio 1**, resuelve la ecuación matricial

$$A X + B^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Calcula el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calcula a y b para que sea 2 el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

6. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m existe la matriz inversa A^{-1}?

b) Resuelve la ecuación matricial $A X = B$ para $m = -1$