Práctica 2:
Derivación de funciones

El punto de partida del Cálculo Diferencial es el concepto de derivada, ya que nos permite medir la variación de una función en un intervalo o, al menos, en el entorno del punto. Geométricamente, este concepto se identifica con la pendiente de una curva en un punto.

En esta práctica se pretende que el alumno aprenda a calcular derivadas de funciones, ya sea a partir de la definición o mediante comandos que nos proporcionan las derivadas de forma directa. Se verán ejemplos de cómo se pueden utilizar los comandos de *Mathematica* para calcular máximos, mínimos, puntos de inflexión y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Derivada de una función real de variable real

Las múltiples aplicaciones que presenta la noción de derivada en todos los campos de la ciencia hacen de esta un elemento clave. Si se considera una función real de variable real f, entonces tenemos que la derivada de la función f es por definición $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Veamos un ejemplo

$$f[x\_] := \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$\text{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0\right]$$

No obstante, el programa *Mathematica* dispone de órdenes que nos permiten el cálculo directo de la función derivada de una función dada, con **f'[x]** o con el comando

D[función, variable]

Veamos algunos ejemplos:

$$f[x\_] := \sqrt{x}$$

```
f'[x]
```

```
D[f[x], x]
```

$$g[x\_] := 2\,\text{ArcTan}\left[\sqrt{\frac{1-\text{Cos}[x]}{1+\text{Cos}[x]}}\right]$$

```
g'[x]
```

```
D[g[x], x]
```

La derivada formal de una función, al igual que cualquier otra expresión, puede simplificarse en *Mathematica* con la orden Simplify.

```
Simplify[g'[x]]
```

O también de esta otra forma:

```
g'[x] // Simplify
```

También podemos definir la función derivada :

$$df[x\_] := \text{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0\right]$$

o también :

```
df[x_] = f'[x]
```

En la práctica anterior vimos cómo comprobar si una función es continua en un punto, en esta práctica estudiaremos la derivabilidad de la función en dicho punto. Para ello la función debe de ser continua en tal punto y además existir su derivada en el punto.

$$g[x\_] := \frac{\text{Sin}[x]}{x}$$

Estudiamos por ejemplo la derivabilidad en el punto $x = \pi$. Primero vemos si la función es continua ya que, de no serlo, directamente podríamos afirmar que no es derivable.

```
g[π]
```

```
Limit[g[x], x → π]
```

Tenemos que la función *g* es continua en π, veamos ahora si es derivable. Lo haremos por la definición:

$$\text{Limit}\left[\frac{g[\pi+h]-g[\pi]}{h}, h \to 0\right]$$

Por tanto tenemos que la función es derivable en el punto $x = \pi$.

Mathematica también puede calcular la función derivada de una función definida por intervalos.

```
f[x_] := Which[x ≤ 0, 1 + x, x > 0, Cos[x]]
```

```
f'[x]
```

Vemos la representación gráfica de la función *j*

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
```

Se observa que *Mathematica* no advierte la no derivabilidad de la función definida a trozos en el punto $x = 0$. De ahí que estemos obligados a estudiar los límites laterales, utilizando en cada caso la definición correspondiente para la función

$$\text{Limit}\left[\frac{f[0+h]-f[0]}{h}, h \to 0, \text{Direction} \to 1\right]$$

$$\text{Limit}\left[\frac{f[0+h]-f[0]}{h}, h \to 0, \text{Direction} \to -1\right]$$

Como los límites laterales son distintos en $x = 0$, la función no es derivable en dicho punto.

El programa *Mathematica* permite también el cálculo de la derivada n-ésima de una función

D[función, {variable, n}]

Estudio de una función real de variable real

La representación gráfica de una función real de variable real conlleva el estudio de extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, convexidad y concavidad, etc... En esta sección desarrollaremos el estudio de la función $f(x) = \frac{-x^3+x^2+4}{x^2}$, finalizando con su representación gráfica.

El cálculo de extremos relativos es una de las más importantes aplicaciones de la derivada. Abordamos el problema de calcular los máximos y mínimos de la función:

```
f[x_] := (-x^3 + x^2 + 4)/x^2
```

El dominio de la función es ℝ-{0}, ya que el denominador se anula para x = 0, como comprobamos a continuación :

```
Solve[x^2 == 0, x]
```

Ahora calculamos los puntos de corte con los ejes:

```
Solve[f[x] == 0, x]
```

```
f[0]
```

El único punto de corte con los ejes coordenados es el (2,0)

Asíntotas :
 - verticales: son los puntos en los que el denominador se anula, en este caso x = 0, que hemos calculado anteriormete

 - horizontales :

```
Limit[f[x], x → ∞]
```

Luego no tiene asíntota horizontal.

-oblicua: son rectas de la forma y = mx+n

```
m = Limit[f[x] / x, x → ∞]
```

```
n = Limit[f[x] - m * x, x → ∞]
```

Por tanto la asíntota oblicua es y = -x+1.

Veamos ahora los puntos que anulan la derivada primera para calcular el crecimiento y decrecimiento así como los máximos y mínimos

```
Solve[f'[x] == 0, x]
```

```
NSolve[f'[x] == 0, x]
```

Estudiamos a continuación el signo de la derivada segunda en los posibles máximos o mínimos.

```
D[f[x], {x, 2}] /. x → -2
```

```
f[-2]
```

La función tiene un mínimo relativo en el punto (2, - 4)

Para el crecimiento y decrecimiento debemos estudiar el signo de la derivada primera en el interior de los intervalos (-∞, -2), (-2, 0) y (0, +∞)

```
f'[-3]
f'[-1]
f'[1]
```

Por tanto, es decreciente en (-∞, -2)⋃(0,+∞) y es creciente en (-2, 0)

Estudiamos ahora la existencia de puntos de inflexión.

```
Solve[f''[x] == 0, x]
```

El estudio de concavidad y convexidad se haría a partir del signo de la derivada segunda de la función en los intervalos determinados por los puntos que no pertenecen al dominio de la función y por los puntos donde se anula la segunda derivada, es dedir, tendríamos los intervalos (-∞, 0) y (0, +∞)

```
f''[-1]
f''[1]
```

Es decir, la concavidad es positiva en todo el dominio de definición

Observando la representación gráfica comprobamos que los resultados obtenidos son correctos.

```
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```

Si queremos comprobar la asíntota :

```
Plot[{f[x], -x + 1}, {x, -5, 5}]
```

Ejercicios

1. Dadas las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = \cos(x)$.

a. Calcula sus derivadas primeras, segundas y terceras.
b. Calcula la función derivada de $f(x)$ y evalúala en x = 5

2. Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -3 < x \leq 2 \\ -x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

3. Considera la función $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

a) Comprueba si la función f es continua y derivable en $x = 0$
b) Calcula su función derivada y evalúala en $\pi/3$
c) Calcula la derivada de orden 5 de f y evalúala en $x = \pi/4$
d) Representa la función.

4. En las siguientes funciones, determina el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, los máximos, mínimos y puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. Represéntalas gráficcamente

a) $f(x) = -x^3 + 3\,x$

b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

5. Las funciones de ingresos y costes anuales por la fabricación y venta de q unidades de un determinado producto vienen dados por:

$I(q) = 2000\,q - 0.04\,q^2$ y $C(q) = 1\,000\,000 + 100\,q + 0.001\,q^2$.

Halla:

a) La función que da el beneficio anual.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo? ¿cuál es ese beneficio?