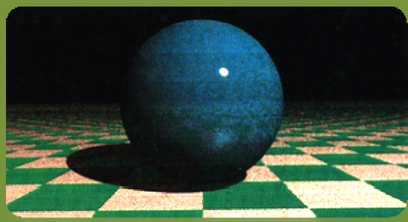
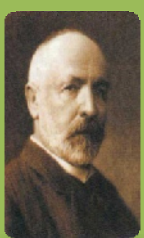
Fractales

Si observamos la naturaleza nos daremos cuenta que, a gran escala, existen formas “suaves” como la luna, el sol, o distintos tipos de frutos. Pero estos mismos objetos a una escala más pequeña empiezan a estar llenos de rugosidades. Además, las nubes, las montañas, o las fronteras entre países, no pueden representarse fielmente por medio de las figuras geométricas clásicas como la recta, la esfera, o el cono.

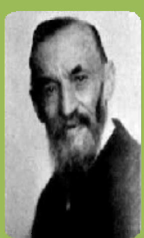


Las matemáticas “clásicas” tan eficaces para describir los procesos regulares, no son adecuadas para representar los procesos irregulares.

La geometría fractal como tal nace en 1975, pero muchas de sus aplicaciones y conceptos eran conocidos mucho antes. En 1875 tiene lugar una crisis importante de los fundamentos de las Matemáticas. Al mismo tiempo, *Reymond* trabajaba con la función de *Weierstrass*, una curva continua con un gran número de irregularidades. Pero se tenía el convencimiento de eran muy escasas y poco interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones.



G. Cantor



G. Peano

H. Poincaré

Los primeros en darse cuenta que las funciones con “**muchas irregularidades**" no eran la excepción sino la norma fueron *Cantor* y *Peano*, pero fue *Poincaré* quien realizó un estudio sistemático de todos estos hechos y elaboró una teoría que hoy en día se conoce con el nombre de Teoría del Caos.

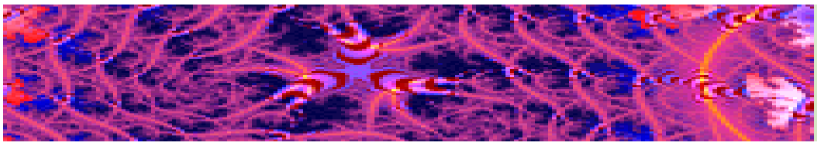
Benoit Mandelbrot, nació en *Warsaw*, Polonia el 20 de Noviembre de 1924 . Su familia emigró a Francia en 1936, donde su tío el matemático *Szolem Mandelbrot* (del grupo *Bourbaki*), se responsabilizó de su educación. Después de completar sus estudios en la Escuela Politécnica de París, viajó al Instituto Tecnológico de California en Estados Unidos y al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton donde estudió con el gran matemático *John von Neumann*.

B. Mandelbrot

G. Julía

Regresó a Francia en 1955 y trabajó en el Centro Nacional de Investigaciones Científicas. No permaneció en Francia mucho tiempo, descontento del tipo de Matemáticas que en aquel momento se hacían en este país. Fue en la empresa IBM, en sus laboratorios de *Watson Research Center*, donde pudo llevar a cabo sus numerosas ideas.

En 1945 *Mandelbrot* leyó los trabajos de *Julía*, y se enfrentó a los mismos problemas desde un punto de vista diferente. Con la ayuda del ordenador demostró que en los trabajos de *Julia* se encuentran una de las fuentes de los más hermosos fractales que hoy en día conocemos.

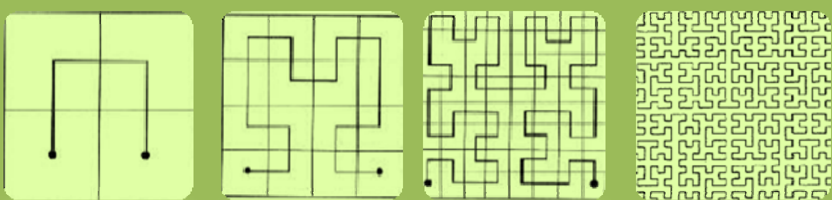


Fractales

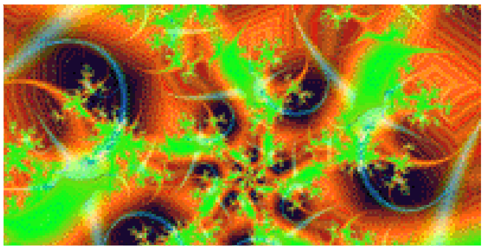
Un **fractal lineal** es aquel que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria.

Pero, ¿qué es un fractal? Realmente es muy difícil dar una definición exacta puesto que requiere de un nivel muy elevado de abstracción. Además, debido al alto número de sus aplicaciones y campos tan diversos donde se aplican, la definición puede ser una u otra. Sin embargo, existe cierto consenso en destacar dos de sus propiedades más importantes. La primera de ellas es la **autosemejanza**, por la cual una pequeña sección del objeto puede ser vista como una reproducción a menor escala de todo el fractal.

La otra característica de un objeto fractal, además de la autosemejanza, es que su **dimensión** puede ser **no entera**. Este aspecto es realmente llamativo ya que si nos fijamos en una curva, en principio todos estaríamos de acuerdo en que su dimensión tendría que ser uno. Sin embargo, existen curvas como la de *Hilbert* donde su dibujo es muy complicado.



Las figuras anteriores representan el resultado final después de 3, 5 y 7 iteraciones. Por ser una curva, su dimensión topológica es uno, pero al "llenar" el cuadrado unidad es lógico pensar que su dimensión debería estar próxima a dos. De hecho puede probarse que su dimensión fractal es dos, aunque al ser una línea infinitamente quebrada su dimensión topológica sigue siendo uno.



"La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares."

M.F. Barnsley

[…] así que me puse a buscar una palabra bonita de raíz latina para designarlo , y cogí un diccionario de latín de mi hijo que había en casa y me puse a buscar «fractura», «fracción» etcétera, y me percaté de que todas esas palabras proceden del adjetivo latino «fractus, fracta, fractum» que hacían referencia a ***aquello en lo que se convierte una piedra al lanzarla: piezas irregulares.*** *¡Eureka! Ahí estaba el término que necesitaba.*

(B. Mandelbrot)

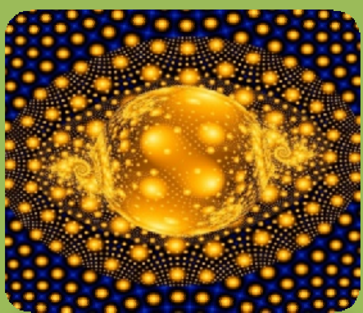
La idea en el trabajo de *Mandelbrot*, *¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*, de medir con segmentos más pequeños no es adecuada, y por lo tanto la longitud de la costa dependerá de la unidad de medida. Para este tipo de curvas, totalmente irregulares, el concepto de medida no tiene sentido.

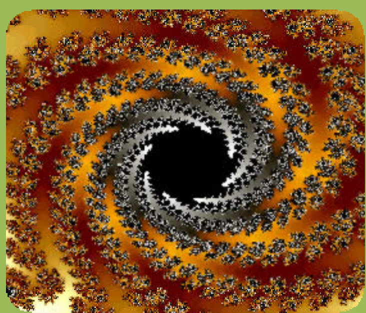
Fractales

Un objeto fractal es aquél que tiene la propiedad de autosemejanza y su dimensión es racional.

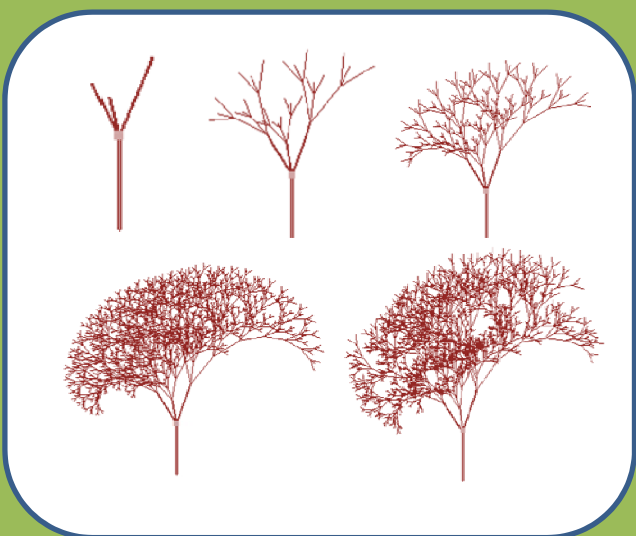
Un ejemplo de fractal lineal es el conocido con el nombre de “copo de nieve", curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados cada vez más pequeños.

Los fractales lineales son demasiado “perfectos" para representar los diferentes objetos de la naturaleza, como una hoja, un árbol o una nube. Por este motivo, se han introducido los **fractales no lineales**, aquel que se obtiene iterando una función no lineal definida en el conjunto de los números complejos.

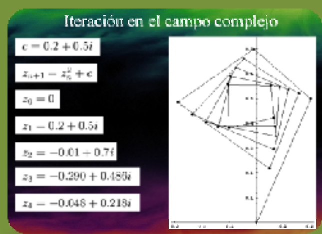




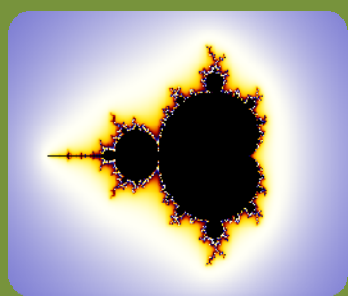
La Geometría Fractal es la herramienta más adecuada para modelizar situaciones complejas originadas por múltiples repeticiones de procesos muy elementales., tal y como ocurre en la naturaleza.



En el **conjunto de *Mandelbro*t** la función no lineal con la que se trabaja es $f(z) = z^2 + c$, con z y c números complejos. Si seleccionamos un número complejo z_0, entonces calculamos $z_1 = f(z_0) = z_0^2 + c$, a continuación, $z_2 = f(z_1) = z_1^2 + c$, $z_3 = f(z_2) = z_2^2 + c$, y así sucesivamente. Si la sucesión $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\}$, permanece a una distancia del origen menor de 2, entonces el punto z_0 está en el conjunto de *Mandelbrot*. Si la sucesión anterior diverge desde el origen, entonces el punto no pertenece al conjunto.



Los números incluidos en el conjunto de *Mandelbrot*, el punto correspondiente a la imagen aparece en color negro. En el caso de los números que no están dentro del conjunto, los colores se asignarán de acuerdo a la “rapidez" de incremento de la sucesión de números complejos



Fractales

Las fronteras de separación entre diferentes medios físicos biológicos o sociales proporcionan, con frecuencia, excelentes ejemplos de sistemas que se pueden analizar mediante fractales

El proceso de ramificación y subramificación da su naturaleza fractal a los árboles o a una cuenca hidrográfica. Puesto que su función es drenar el agua, una red fluvial es un modelo natural de curva que cubre una superficie, una de las propiedades concebidas como aberrantes por los matemáticos de hace cien años y que es característica de conjuntos fractales.

El proceso de ramificación se manifiesta en el cuerpo humano, debido al hecho de que el organismo organiza sus moléculas de la manera más eficiente para poder prolongarse a lo largo del tiempo. Ejemplos de ramificaciones los tenemos en el pulmón, el sistema nervioso o el sistema arterial.

Otras estructuras ,como la materia blanca del cerebro, pueden ser estudiadas por medio de la dimensión fractal y de esta manera pueden ser diagnosticadas enfermedades como la Esclerosis Múltiple o el Arzheimer.

Llama la atención del elevado número de personas, sin conocimientos matemáticos, que se han acercado a la geometría fractal por motivos únicamente estéticos