Los sentidos se deleitan con las cosas
que tienen las proporciones correctas.

Santo Tomás de Aquino

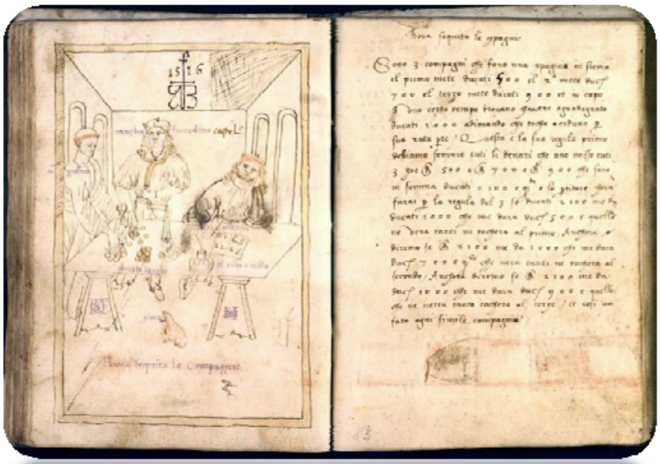
LEONARDO PISSANO FIBONACCI.

EL NÚMERO ÁUREO

Leonardo Pisano es más conocido por su apellido *Fibonacci*. Nació en *Pisa* en el año 1170 y murió en la misma ciudad en 1250. Aunque nació en Italia, fue educado en el Norte de África, donde su padre *Guilielmo*, era un representante diplomático de la república de *Pisa* en la ciudad argelina de *Bugía*. Durante su estancia en esta ciudad estudió con profesores árabes quienes le enseñaron el cálculo posicional hindú que posteriormente introdujo en Europa sustituyendo al sistema de numeración romano. En el año 1200 regresó a Pisa y escribió un número importante de trabajos, actualizando algunos resultados matemáticos, así como proporcionando nuevos e interesante conceptos,

entre ellos, como se ha comentado, nuestro actual sistema de numeración posicional.

Hoy en día todavía se conservan copias de algunos de sus libros, como por ejemplo, *Liber abbaci (1202), Practica geometriae (1220), Flos (1225),* y *Liber quadratorum.* Un problema que se encuentra en la tercera sección de su libro *Liber abbaci* llevó a la introducción de los números de *Fibonacci* y a la sucesión que lleva su nombre, y es la razón por la que aún hoy en día es tan recordado.

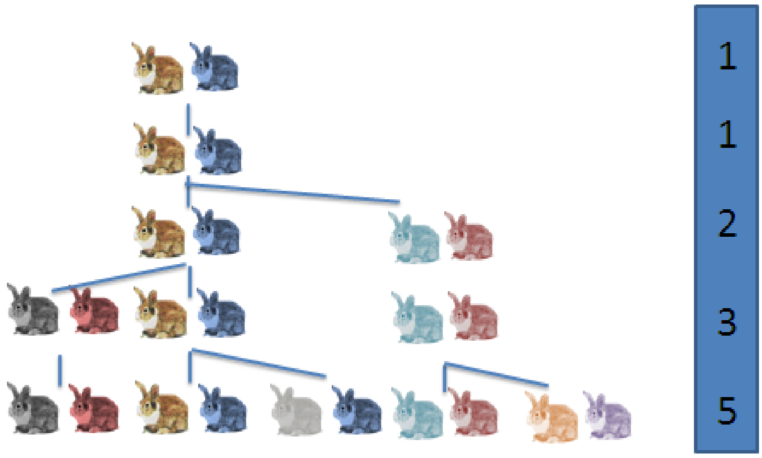


Supongamos que un par de conejos recién nacidos, un macho y una hembra se colocan en el campo. Los conejos son fértiles a la edad de un mes, así que al final del segundo mes una hembra puede producir otro par de conejos. Supongamos que nuestros conejos nunca mueren, y que las hembras siempre producen un nuevo par (un macho y una hembra) cada mes, desde el segundo de los meses. La pregunta que Fibonacci se hizo fue la siguiente, ¿cuántos pares de conejos tendremos en un año?

Si observamos atentamente del enunciado del problema deducimos que:

- Al final del primer mes, hay un solo par.
- Al final del segundo mes, la hembra produce un nuevo par, así que ahora tenemos dos parejas de conejos en el campo.
- Al final del tercer mes, la hembra inicial produce un segundo par, haciendo que en el campo tengamos tres pares de conejos.
- Al final del cuarto mes, la hembra original ha producido otro nuevo par y la hembra nacida dos meses antes produce su primer par, con lo que tendremos 5 pares.

- Y así sucesivamente......

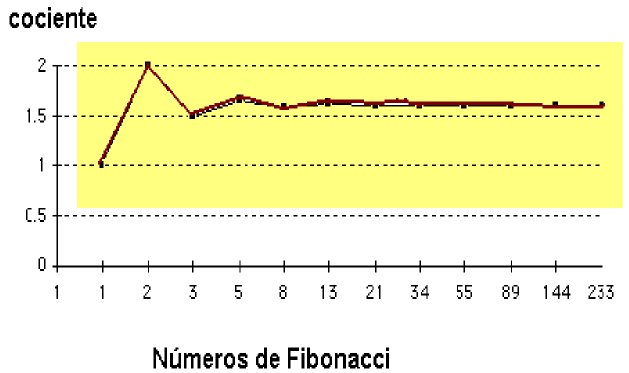


El número de pares de conejos en el campo al inicio de cada mes es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…….,

una sucesión, que se inicia con 1 y 1 donde cada otro término es la suma de los dos anteriores, y que recibe el nombre de la sucesión de *Fibonacci*. Si hacemos el cociente de dos números consecutivos de la sucesión obtenemos esta otra:

1/1=1, 2/1=2, 3/2=1.5, 5/3=1.666, 8/5=1.6, 13/8=1.625, 21/13=1.61538, ..



Es fácil ver lo que sucede si dibujamos estos resultados en un gráfico:

El cociente tiende a un valor particular, el cual recibe el nombre de **número áureo,** tiene un valor aproximado de 1.61804, y se representa por la letra griega Ø (Phi). Si la sucesión se inicia con otros dos números cualesquiera, {3, 7, 10, 17, 27, 71, 115, …} el cociente entre un término y el anterior en la sucesión tiende al número áureo Ø.

También podemos hacer aparecer el número áureo a través de una cuestión estética**,** que aparece en el libro *La Divina proporción* de *Luca Pacioli*. Si consideramos un segmento y preguntamos cuál es la división "más agradable" en dos partes del mismo, algunas personas pensarán que el punto medio es el más adecuado, otras en cambio pensarán que la tercera o cuarta parte. La respuesta correcta no es ninguna de ellas, ya que la división correcta es la conocida con el nombre de **razón áurea** o **divina proporción**. Si el segmento es de longitud 1, entonces el segmento mayor tiene longitud 0.618.... A un segmento dividido de esta forma decimos que está dividido en la sección áurea. Pensemos que si u es la longitud del segmento, se tiene que verificar:

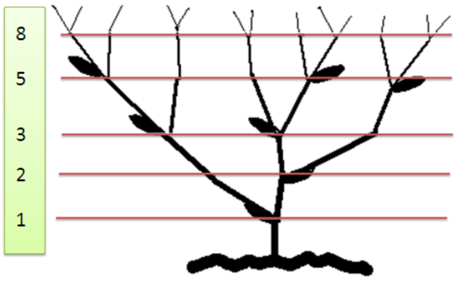
$$\frac{segmento\_mayor}{segmento} = \frac{segmento\_menor}{segmento\_mayor} \Rightarrow \frac{u}{u+v} = \frac{v}{u}$$

si llamamos $\phi = \frac{u}{v}$, podemos escribir:

$$1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{v}{u} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \phi$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de segundo grado $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, que tiene como raíz el valor $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$, que como sabemos es el número áureo.

Una planta muestra los números de *Fibonacci* en el número de "puntos de crecimientos" que tiene. Supongamos que cuando una planta echa un nuevo retoño, este ha tenido que crecer dos meses antes para que se encuentre lo bastante fuerte para soportar la bifurcación. Una planta que crece mucho de esta forma es la *Achillea ptarmica.*



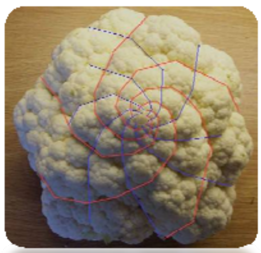
En muchas plantas, el número de pétalos es un número de la sucesión de *Fibonacci*. La azucena y el iris tienen tres pétalos; las rosas salvajes 5; el delphiniums 8; algunas caléndulas granuladas 13; la achicoria 21; mientras que algunas margaritas pueden encontrarse con 34, 55 y hasta 89 pétalos. Algunas especies son muy precisas sobre el número de pétalos que tienen, (por ejemplo el botón de oro), pero otras tienen pétalos que están muy cerca de ellos, pero que su media es justo un número de *Fibonacci*.






Los números de *Fibonacci* también están presentes en la disposición de las semillas de algunas plantas.

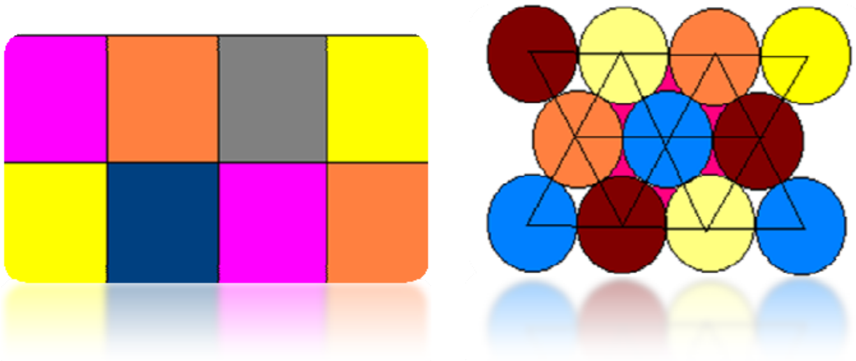


Podemos apreciar que las semillas se disponen según espirales, una de ellas a la izquierda y otra a la derecha. Si contamos la espiral de la derecha al final del dibujo, nos encontramos con que hay 34. ¿Cuántas existen hacia el otro lado? Puede comprobarse que estos dos números son vecinos en la sucesión de Fibonacci.

La pregunta inmediata que nos planteamos es ¿por qué sucede esto? La respuesta se encuentra detrás de un problema de optimización. Si deseamos apilar objetos de la "mejor forma posible", la respuesta será que dependerá de la forma que posean.

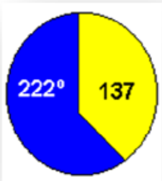
Si estos objetos son cuadrados, la respuesta correcta será la figura de la izquierda. Sin embargo, si estos objetos son redondos la mejor disposición es la conocida con el nombre de hexagonal (figura derecha).



Por otro lado, muchas plantas que poseen un tallo alto tienen adheridas las hojas según un esquema bastante interesante, En efecto, se cumple la llamada ley de la Filotaxis (ciencia que estudia el ordenamiento de los elementos de una planta), "**para cada especie de plantas el ángulo que forman dos hojas consecutivas, llamado ángulo de divergencia, es constante".**

Pero, ¿por qué la naturaleza no utiliza alguna de éstas disposiciones? La mayoría de las semillas son redondas, entonces ¿por qué no se disponen en forma hexagonal las semillas del girasol? La razón es que aunque la simetría hexagonal es la mejor manera de empaquetar semillas circulares, esto no responde a la pregunta de por qué las hojas se distribuyen alrededor del tallo o como se empaquetan las semillas del girasol (las cuales son circulares porque es la forma que encierra máxima área con una determinada longitud), cuando están creciendo en tamaño. La naturaleza utiliza el **mismo patrón** para colocar las semillas del girasol, los pétalos alrededor del borde de una flor y las hojas alrededor del tallo. Además, sigue siendo eficiente cuando la planta continúa creciendo. Los botánicos han demostrado que las plantas crecen desde un grupo diminuto de células dispuestas en el extremo de cualquier planta en crecimiento, llamado el meristemo. Hay un meristemo separado al final de cada rama o varita y allí es donde se forman las nuevas células, que crecen en tamaño, pero las nuevas células solo se forman en esos puntos de crecimiento. Las nuevas células expanden el tallo y de esta manera se produce el crecimiento.

También estas células crecen en forma de espiral, como si el tallo girase un ángulo y entonces aparece la nueva célula, vuelve a girar de nuevo y entonces se forma otra nueva célula. Estas nuevas células dan lugar a una nueva rama, o tal vez a un nuevo pétalo en una flor. Lo asombroso es que un **simple ángulo fijo produce el diseño óptimo no importa como de grande sea el crecimiento de la planta.** Una vez que una semilla está situada en el girasol, esta semilla es empujada en línea recta por otra nueva semilla, pero guarda el ángulo original en el girasol. No importa como de grande sea el girasol, las semillas siempre se empaquetarán uniformemente.



Todo esto fue intuido por muchos científicos en el último siglo, pero el principio de que *un ángulo fijo produce empaquetamientos uniformes sin importar el tamaño de este crecimiento,* ha sido demostrado en 1993 por los matemáticos franceses *Douady* y *Couder*. La distribución de las hojas es la misma que el de las semillas y los pétalos. En todos ellos aparece el número 0.618034 por vuelta. Si hablamos de grados serán 0.61803 de 360º, que suponen 222.492.º. Pero como siempre tendemos a diferenciar el ángulo más pequeño, éste será 137.5076º. Si hay $\phi = 1.618..$ hojas por vueltas, entonces tenemos la mejor manera de empaquetar, de esta manera, cada hoja recibirá la máxima cantidad de luz, proporcionando la menor sombra a las otras. También da la mejor área posible de exposición, para que cuando la lluvia caiga, baje a través de las hojas y se deposite en las raíces.

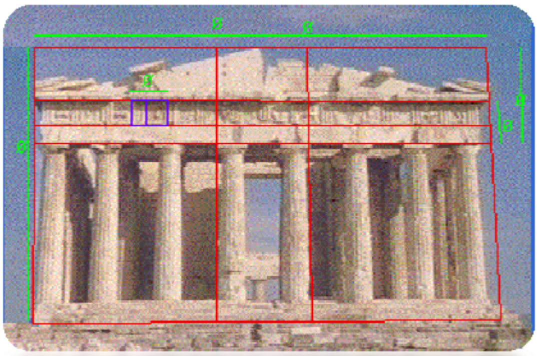
Pero debemos dejar claro que no siempre las sucesión de Fibonacci se encuentra en el número de pétalos de cualquier flor, o en el número de semillas de plantas del tipo del girasol, aunque si están cercanos a algunos términos de la sucesión de *Fibonacci*. De todos modos, en un trabajo publicado por *Jean* en 1992, de 12700 observaciones correspondientes a 650 especies de plantas diferentes, la sucesión de Fibonacci está presente en un 90 % de todas aquellas donde sus elementos están dispuestos en formas de espirales. Algunos ejemplos donde esta condición no se cumple son las imágenes que ofrecemos a continuación.

El *papiro del Rhind* del año 1650 a.c. es uno de los trabajos matemáticos más antiguos de los que tenemos noticias. En él podemos encontrar métodos y problemas usados por los antiguos egipcios, y se menciona un **cociente sagrado** que fue utilizado para la construcción de la gran pirámide de Giza, pero no está claro que este número sea el áureo. El cociente entre la longitud de una cara (desde el centro de su base a la cúspide de la pirámide) y la distancia desde el centro de la base al centro exacto de la base cuadrada de la pirámide es aproximadamente 1.62.-

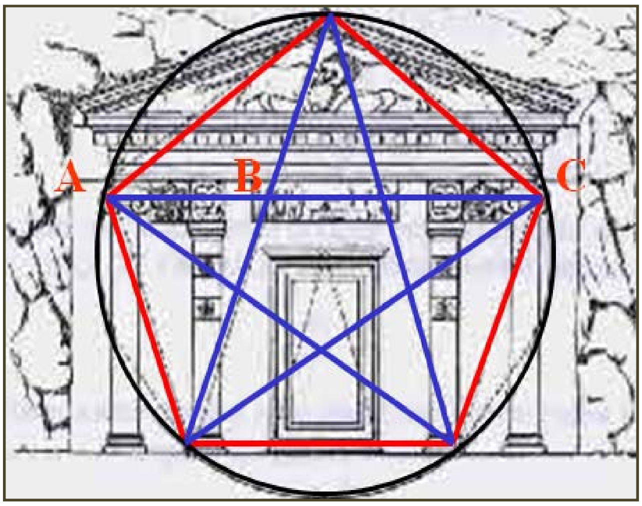
No hay grabaciones exactas de los planos de los arquitectos griegos, para construir sus famosos edificios y templos. Por esta razón no sabemos si usaron deliberadamente el número áureo en su arquitectura. La Acrópolis, en el centro de Atenas, son unas ruinas que dominan a esta antigua ciudad. Su monumento más famoso es el Parthenon, un templo dedicado a la diosa Atenas construido alrededor del 430 a.c. o 440 a,c.

Aunque no disponemos de los planos, parece ser que fue construido sobre un rectángulo que posee $\sqrt{5}$ veces más de largo que de ancho. Esa son también las dimensiones del lado más largo del templo. Del mismo modo, la frontal está construido sobre un rectángulo áureo, que es, ϕ veces más largo que alto.



Muchos de los edificios actuales han sido construidos siguiendo el rectángulo áureo, como por ejemplo el edificio de la ONU diseñado por el famoso arquitecto *Le Corbusier* o la catedral de *Nôtre Dame* en *París*.

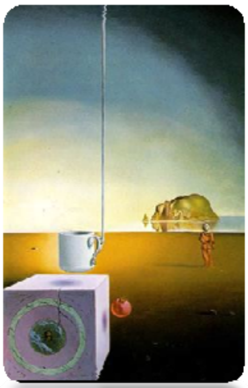
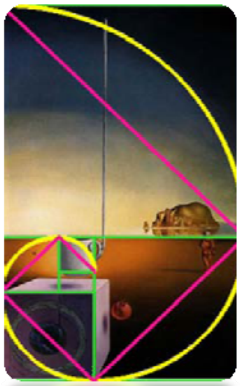
Los griegos obtuvieron el número áureo al dividir la diagonal del pentágono regular entre su lado. Por esta razón es posible dibujar un pentágono regular con regla y compás, como se observa en este dibujo de la tumba rupestre de Mira. La estrella pentagonal o estrella de Italia era el símbolo utilizado por los pitagóricos y les servía para reconocerse entre sí.



La obra de Salvador Dalí de 1947 que lleva el título de *Dela Atómica* está basada en el pentágono regular y la razón áurea. El pintor realiza un estudio meticuloso del tema, tal y como puede apreciarse en algunos de los bocetos que se conservan, e introduce a Leda y al cisne es una estrella de cinco puntas, el pentagrama místico pitagórico.

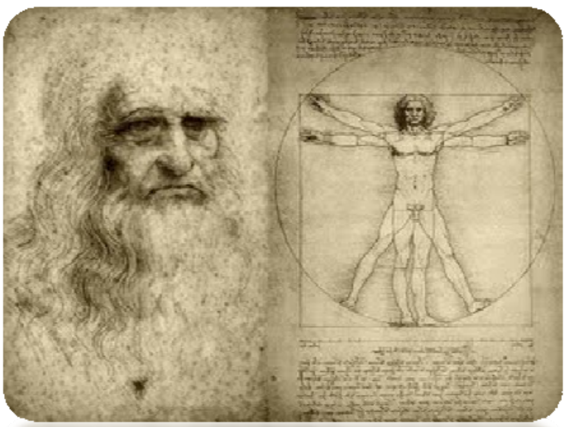
Otro cuadro realizado por Dalí basado en la proporción áurea es *Media taza gigante volante con anexo inexplicable de cinco metros de longitud*. Sus dimensiones son 50 x 31 cm., por tanto su cociente es 1.613.., el número phi. Además, el cuadro se descompone en distintos rectángulos áureos con el objetivo de organizar los distintos elementos que aparecen en el mismo.

También la Divina Proporción puede encontrarse en el cuadro de *los fusilamientos del 3 de Mayo* de *Francisco de Goya*.

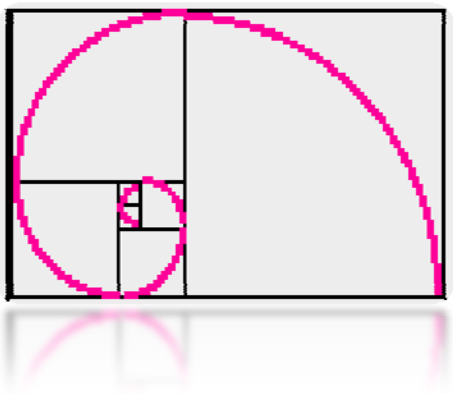

La proporción áurea está presente en multitud de objetos de la vida cotidiana como libros, tarjetas de crédito, cajetillas de tabaco, etc.…, y en general en todos aquellos objetos "armoniosos" de forma rectangular.

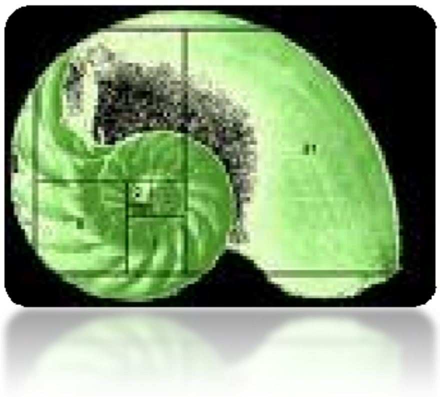
Los artistas clásicos griegos y romanos investigaron sobre el ideal de belleza en sus hermosas esculturas del cuerpo humano, los resultados de estos estudios están recogidos en el libro *La Divina Proporción* de *Luca Pacioli* (1509), en cuya portada aparece una famosa ilustración de Leonardo da Vinci conocida como el hombre de Vitruvio. En este libro se propone al ser humano perfecto como aquel en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas.



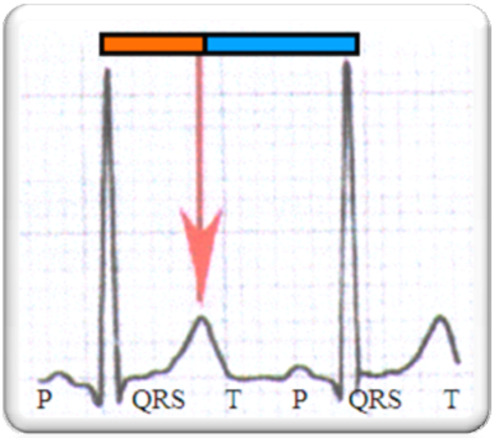

La relación Φ se encuentra al realizar el cociente entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia que tiene por centro el ombligo del hombre dibujado.

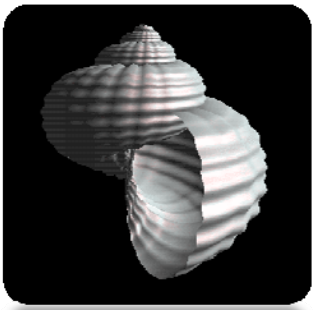
A continuación, investigaremos la relación existente entre las **espirales** y la **sucesión de *Fibonacci*.** Comenzamos con dos pequeños cuadrados de lado unidad, uno a continuación del otro. En su parte superior dibujamos un cuadrado de lado 1+1=2. Procedemos de forma similar y añadimos un cuadrado de lado 2+1=3, y así sucesivamente. Este conjunto de rectángulos, con la propiedad de que sus lados son dos números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci*, recibe el nombre de rectángulos de Fibonacci.





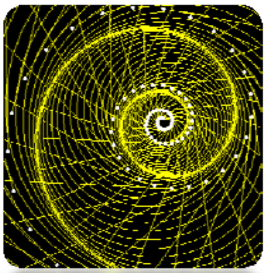
Las formas de estas espirales reciben el nombre de espirales de *Durero* y son una excelente aproximación de las espirales logarítmicas. En las siguientes figuras mostramos algunos ejemplos virtuales construidos con ordenador, para ello se han usando funciones periódicas variando solamente tres de los parámetros.

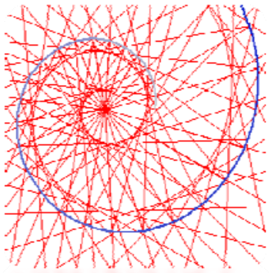




La investigaciones sobre las espirales empezaron con los griegos. La espiral logarítmica fue descubierta por *Descartes*, y sus propiedades de auto - reproducción por *Jacob Bernouilli* (1654-1705), quien pidió que la curva fuese grabada en su tumba con el siguiente epitafio " *eadem mutata resurgo* " (Me levantaré el mismo, aunque cambie). La espiral logarítmica describe a una familia de curvas definida de la siguiente manera. Es la curva que corta a los radios vectores con un ángulo constante.

- Sea una espiral (que es una curva, $r = f[\alpha]$, donde f es una función monótona creciente).
- Desde un punto P sobre la espiral, dibujamos una línea hacia el centro de la espiral (esta línea la llamamos radio vector).
- Si el ángulo formado por el radio vector y la tangente para cualquier punto P es constante, la curva es una espiral logarítmica.





El ritmo cardiaco es medido mediante electrocardiógrafos, que miden la diferencia de potencial de las células cardiacas mediante el uso de electrodos, controlando los movimientos diastólicos y sistólicos del corazón. La letra P se corresponde con la despolarización de la aurícula, las letras Q,R,S representan la despolarización del ventrículo, y la T, está relacionada con la repolarización del ventrículo. Los distintos picos QRS se separan entre sí de un pico menor de tamaño T, situado a una distancia cuanto más proporcional al número áureo, el individuo será más saludable.

Para finalizar, comentaremos dos maneras interesantes de encontrar el número ϕ con una calculadora:

- **MÉTODO 1**. Procedemos de la manera siguiente:
  - Iniciamos el proceso introduciendo el número 1.
  - Calculamos su recíproco, y le añadimos 1.
  - Calculamos su recíproco, y le añadimos 1.
  - Repetimos el proceso.

  Recordemos que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, y por lo tanto el método está plenamente justificado. Observemos que inicialmente no podemos tomar como valor inicial el 0 o el –1.

- **MÉTODO 2.** Procedemos de la manera siguiente:
  - Introducimos cualquier número (entero o racional) pero más grande que (-1).
  - Añadimos 1, y calculamos su raíz cuadrada.
  - Añadimos 1, y calculamos su raíz cuadrada.
  - Y así sucesivamente

  Sabemos que $\phi^2 = \phi + 1$, por lo tanto $\phi = \sqrt{\phi + 1}$. Pero hay otro valor que cumple la ecuación $x^2 = x + 1$, además del ϕ, y que juega un papel interesante si comenzamos con el valor –0.618034.

Referencias.

- Arte y naturaleza en clave geométrica. María Encarnación Reyes Iglesias
- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html
- http://www.isftic.mepsyd.es/formacion/enred/web_espiral/naturaleza/vegetal/fibonacci/fibonacci.htm
- http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm
- http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Curiosid/Rc-25/RC-25.htm
- http://www.portalplanetasedna.com.ar/divina_proporcion.htm
- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/Libros/LiburuakDet.asp?Id=353
- http://201.116.18.153/laciencia/matematicas_sec/mg_fibonacci/fibonacci.htm