



*No debe menospreciarse la Ciencia de los
Números... no en vano en las alabanzas de Dios
se dice: todo ha sido creado con medida,
número y peso*

San Isidoro de Sevilla (570-636)

FRACTALES: MATEMÁTICAS DE BELLEZA INFINITA

Uno de los científicos actuales más importantes en el campo de la geometría fractal, el profesor *Michael F. Barnsley*, publicó en 1993 el libro *Fractals everywhere*, que se ha convertido en la referencia básica de todos aquellos que se ocupan de esta disciplina. En la primera página, dentro del capítulo de introducción, puede leerse el siguiente texto:

*“La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas.
Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen
inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas,
montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las
interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares.”*



Y en efecto, una vez conocidas las nociones básicas de esta teoría, ya nunca más se vuelve a mirar a la naturaleza y al mundo que nos rodea con los mismos ojos. Si observamos la naturaleza nos daremos cuenta que, a gran escala, existen formas “suaves” como la luna, el sol, o distintos tipos de frutos. Pero estos mismos objetos a una escala más pequeña empiezan a estar llenos de rugosidades. Además, las nubes, las montañas, o las fronteras entre países, no pueden representarse fielmente por medio de las figuras geométricas clásicas como la recta, la esfera, o el cono. Las matemáticas “clásicas” tan

eficaces para describir los procesos regulares (geometría euclídea) o los modelos dinámicos lineales (mecánica de *Newton*), no son adecuadas para representar los procesos irregulares o los modelos dinámicos no lineales (modelos caóticos). *Mandelbrot* fue el primer matemático en darse cuenta de este hecho y a los setenta años de edad, elaboró una teoría que hoy en día está siendo utilizada en disciplinas tan diversas como la economía o la medicina.

La geometría fractal como tal nace en 1975, pero muchas de sus aplicaciones y conceptos eran conocidos mucho antes, aunque con objetivos totalmente diferentes. En 1875 tiene lugar una crisis importante de los fundamentos de las Matemáticas. Al mismo tiempo, un matemático, *Reymond*, trabajaba intensamente con la función de *Weierstrass*, una curva continua con un gran número de irregularidades, que eran conocidas en el siglo XVII, antes del descubrimiento del cálculo infinitesimal por *Newton* y *Leibnitz*, pero se tenía el convencimiento de eran muy escasas y poco interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones. Los primeros en darse cuenta que las funciones con **“muchas irregularidades”** no eran la excepción sino la norma fueron *Cantor* y *Peano*, pero fue *Poincaré* el primero en hacer un estudio sistemático de todos estos hechos y elaborar una teoría que hoy en día se conoce con el nombre de Teoría del Caos. El final de la crisis de fundamentos se produce en 1925, y durante su desarrollo aparece un grupo importante de excelentes matemáticos: *Cantor*, *Peano*, *Lebesgue*, *Hausdorff*, *Besicovitch*, *Bolzano*, *Koch*, *Sierpinski*.

Las **“matemáticas clásicas”** son las herramientas adecuadas para estudiar las estructuras regulares de la geometría de *Euclides* y la evolución continua de la dinámica de *Newton*. Como hemos indicado, la necesidad de unas “nuevas matemáticas” se origina al descubrirse estructuras algebraicas que no encajaban con los patrones de *Newton* y *Euclides*, como son la curva de *Cantor* y la curva de *Peano*, las cuales son capaces de “llenar el plano”. La cuestión clave está en lo siguiente: al ser una curva tienen dimensión 1, pero al rellenar un cuadrado su dimensión debería ser 2, por tanto, ¿cuál es la dimensión de estas estructuras? Estos nuevos elementos no estaban contemplados en la matemática tradicional y fueron consideradas como monstruos matemáticos.

Y llegamos a *Benoit Mandelbrot*, creador de estas nuevas estructuras matemáticas conocidas con el nombre de fractales. En 1973 le invitaron a dar una conferencia en el prestigioso *Collège de France* de París sobre sus trabajos realizados en los últimos veinte años y como consecuencia de ello publicó un libro al que debía dar título.

[...] así que me puse a buscar una palabra bonita de raíz latina para designarlo y cogí un diccionario de latín de mi hijo que había en casa y me puse a buscar «fractura», «fracción» etcétera, y me percaté de que todas esas palabras proceden del adjetivo latino «fractus, fracta, fractum» que hacían referencia a aquello en lo que se convierte una piedra al lanzarla: piezas irregulares. ¡Eureka! Abí estaba el término que necesitaba.



Benoit Mandelbrot, nació en Warsaw, Polonia el 20 de Noviembre de 1924, su familia emigró a Francia en 1936, donde su tío *Szolem Mandelbrot*, que sucedió al gran matemático *Hadamard* en el cargo, se responsabilizó de su educación. Su dedicación a las

matemáticas aplicadas parece ser que fue una reacción de rechazo al tipo de investigaciones en matemática teórica que hacía el grupo de investigación de su tío (grupo Bourbaki). Después de completar sus estudios en la Escuela Politécnica de París, viajó al Instituto Tecnológico de California en Estados Unidos y al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton donde estudió con el gran matemático *John von Neuman*. Regresó a Francia en 1955 y trabajó en el Centro Nacional de Investigaciones Científicas. No permaneció en Francia mucho tiempo, descontento del tipo de Matemáticas que en aquel momento se hacían en este país. Fue la empresa IBM, en su centro de investigación *Watson Research Center*, donde encontró el ambiente adecuado para poder llevar a cabo sus numerosas ideas.



1.- *H. Poincaré*



2.- *G. Julia*



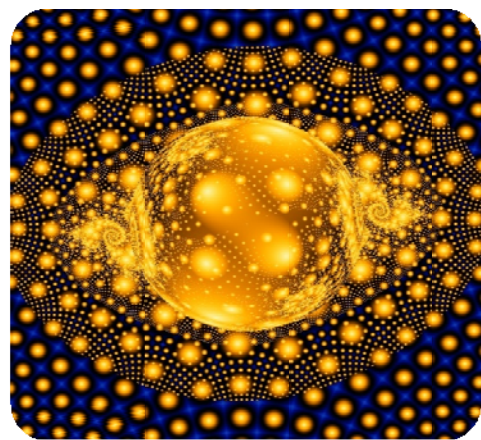
3.- *B. Mandelbrot*

En 1945 su tío le comentó los trabajos de *Julia*, y se enfrentó a los mismos problemas desde un punto de vista diferente. Con la ayuda del ordenador demostró que en

los trabajos de *Julia* se encuentran una de las fuentes de los más hermosos fractales que hoy en día conocemos. De esta manera, no solo descubrió nuevas ideas matemáticas, sino que supuso en su momento un avance muy importante en la construcción de los primeros programas para elaborar gráficos por ordenador.

Como muchos de los grandes descubrimientos matemáticos, los orígenes de la geometría fractal se encuentran en un problema de la vida real. En 1958 *Mandelbrot* trabajaba en IBM en una cuestión bastante común en las líneas telefónicas como era el ruido de fondo. El tema era bastante difícil de resolver puesto que no era posible construir un modelo matemático que representase fielmente al patrón con el que difundía el ruido. En 1945 había estudiado los trabajos de *Gastón M. Julia*, en especial "*Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*", y un poco después los trabajos de *Cantor*. Su intuición le llevó a aplicar estos nuevos descubrimientos y en especial hacer uso del conjunto de *Cantor* para simular el comportamiento de las fluctuaciones del ruido, y el modelo se ajustaba perfectamente a la situación que estaba estudiando. A partir de estos momentos su campo de investigación se centró en el análisis de aquellas estructuras que presentan un elevado número de irregularidades.

Fruto de sus primeras reflexiones es su famoso artículo: "*¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*" La idea de medir con segmentos (unidades de medida) más pequeños no es adecuada, como fácilmente puede entenderse, y en consecuencia la longitud de la costa dependerá de la escala que utilicemos para medirla. Para este tipo de curvas, totalmente irregulares, el concepto de medida no tiene sentido.



Pero, ¿qué es un fractal? Realmente es muy difícil dar una definición exacta puesto que requiere de un nivel muy elevado de abstracción. Además, debido al alto número de sus aplicaciones y campos tan diversos donde se aplican, la definición puede ser una u otra. Sin embargo, existe cierto consenso en destacar dos de sus propiedades más importantes. La primera de ellas es la **autosemejanza**, por la cual una pequeña sección del objeto puede ser vista como una reproducción a menor escala de todo el fractal. Esta propiedad puede observarse en la naturaleza, por ejemplo en una coliflor. Si desprendemos una de sus partes, entonces reconoceremos la forma de toda la figura inicial.

A continuación presentamos algunas de las definiciones más usuales:

- Los fractales son los objetos matemáticos que conforman la geometría de la Teoría del Caos.
- Los fractales son objetos cuya dimensión es un número racional.
- Un fractal es aquél objeto tal que su dimensión de *Hausdorff - Besicovich* es mayor que su dimensión topológica.
- Un objeto fractal es aquél que tiene la propiedad de autosemejanza y su dimensión es racional.

De entre todos los tipos de fractales, los lineales son los más simples. Un **fractal lineal** es aquel que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria. Normalmente los fractales son autosemejantes, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal.

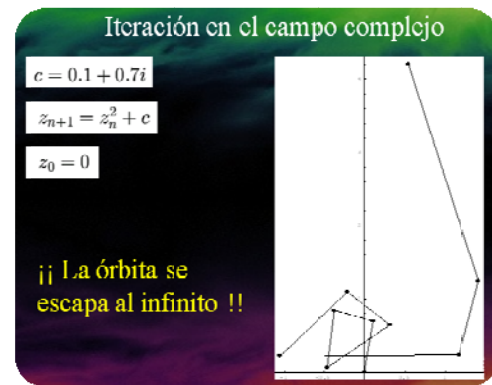
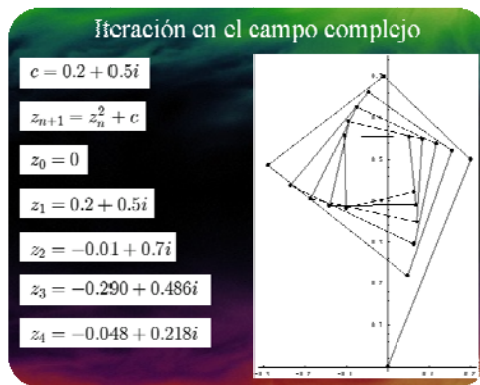
Un ejemplo de fractal lineal es el conocido con el nombre de “copo de nieve”, curva que se obtiene tomando un triángulo equilátero y colocando sucesivos triángulos, cada vez de menor tamaño, en el tercio medio de los lados cada vez más pequeños. En teoría, el resultado es una figura de superficie finita pero con un perímetro de longitud infinita y con un número infinito de vértices.



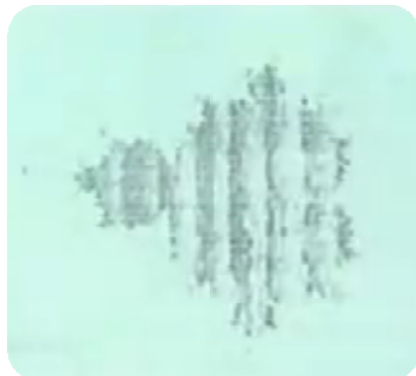
Los fractales lineales son demasiado “perfectos” para representar los diferentes objetos de la naturaleza, como una hoja, un árbol o una nube. Por este motivo, se han introducido los **fractales no lineales**, aquel que se obtiene iterando una función no lineal definida en el conjunto de los números complejos. Entre los más conocidos se encuentran el fractal de *Mandelbrot* y el de *Julia*.



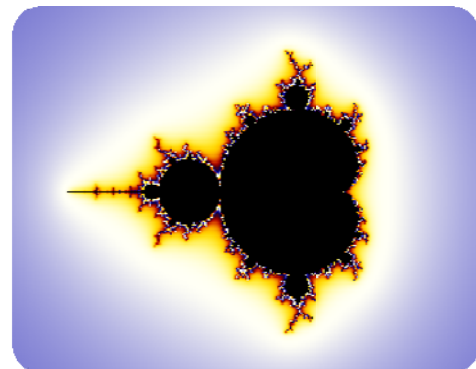
Antes de seguir adelante, es conveniente detenernos un momento y analizar con más detalle un concepto clave como es la iteración. Este proceso consiste en repetir y volver a repetir sobre sí mismo una cierta cantidad de veces. Por ejemplo, en el caso del conjunto de *Mandelbrot* la función no lineal con la que se trabaja es $f(z) = z^2 + c$, con z y c números complejos. Si seleccionamos un número complejo z_0 , entonces calculamos $z_1 = f(z_0) = z_0^2 + c$, a continuación, $z_2 = f(z_1) = z_1^2 + c$, $z_3 = f(z_2) = z_2^2 + c$, y así sucesivamente. Si la sucesión $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}$, permanece a una distancia del origen menor de 2, entonces el punto z_0 está en el conjunto de *Mandelbrot*. Si la sucesión anterior diverge desde el origen, entonces el punto no pertenece al conjunto.



Los números incluidos en el conjunto de *Mandelbrot*, el punto correspondiente a la imagen aparece en color negro. En el caso de los números que no están dentro del conjunto, los colores se asignarán de acuerdo a la “rapidez” de incremento de la sucesión de números complejos. Por ejemplo, si la sucesión se incrementa lentamente, el punto inicial aparece de color celeste, si crece más rápidamente, tendrá color amarillo, rojo, o azul dependiendo de la velocidad de este incremento.



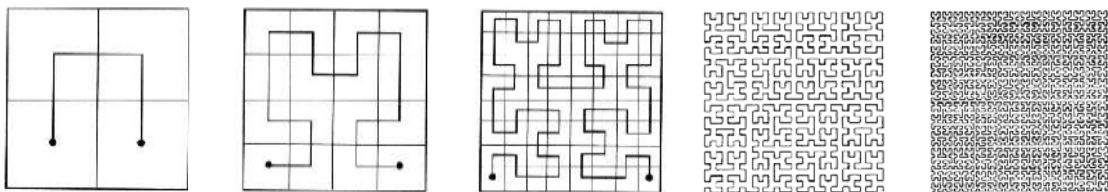
1.- Imagen inicial de Mandelbrot



2.- Fractal de Mandelbrot coloreado

La otra característica de un objeto fractal, además de la autosemejanza, es que su **dimensión** puede ser **no entera**. Este aspecto es realmente llamativo ya que si nos fijamos en una curva, en principio todos estaríamos de acuerdo en que su dimensión tendría que ser uno. Sin embargo, existen curvas como la de *Hilbert* donde su dibujo es muy complicado. Para poner de manifiesto este hecho podemos dibujar el fractal lineal de *Hilbert* a través de la iteración infinita del siguiente proceso geométrico: dividimos el cuadrado unidad en cuatro cuadrados iguales y unimos los centros de dichos cuadrados

por segmentos. Cada uno de esos cuadrados se divide de nuevo en cuatro cuadrados y conectamos sus centros comenzando siempre por el cuadrado superior izquierdo y terminando en el cuadrado superior derecho. Se continúa de esta manera indefinidamente uniendo los centros de los cuadrados que resultan en cada etapa.

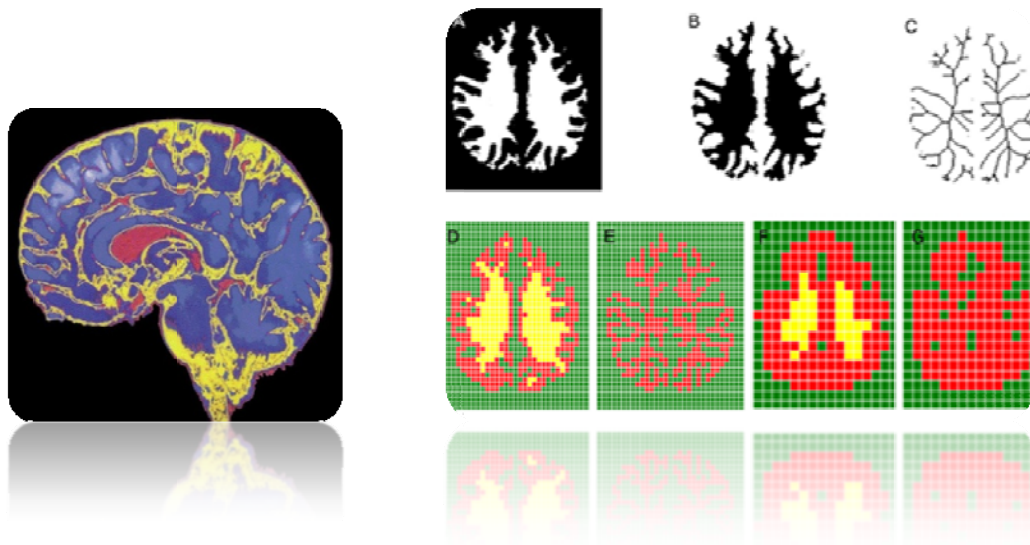


Las figuras anteriores representan el resultado final después de 3, 5 y 7 iteraciones. Por ser una curva, su dimensión topológica es uno, pero al “llenar” el cuadrado unidad es lógico pensar que su dimensión debería estar próxima a dos. De hecho puede probarse que su dimensión fractal es dos, aunque al ser una línea infinitamente quebrada su dimensión topológica sigue siendo uno. De manera similar puede construirse otros fractales geométricos, como por ejemplo la curva copo de nieve de *koch*, cuya dimensión fractal es 1.2618

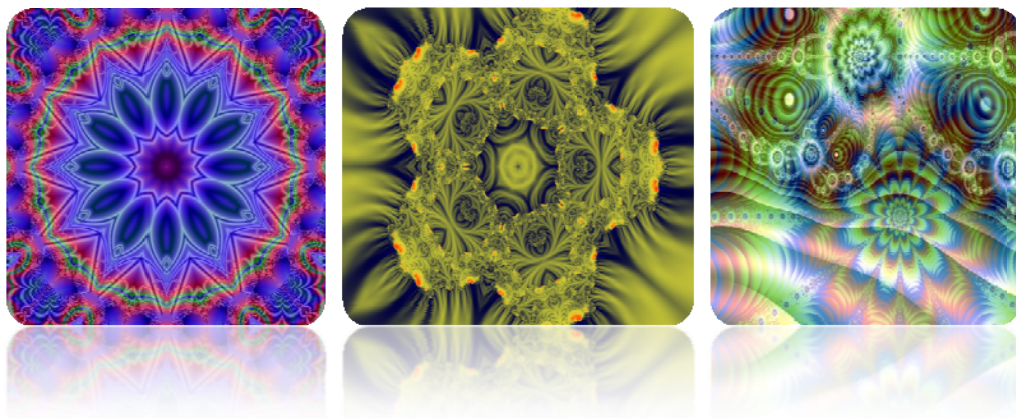
En general, la Geometría Fractal es la herramienta más adecuada para modelizar situaciones complejas originadas por múltiples repeticiones de procesos muy elementales, pues como acabamos de ver, los fractales ofrecen la posibilidad de construir estructuras complicadas a través de algoritmos muy simples. Este es el caso de muchos objetos de la naturaleza que se ramifican. De esta manera, y como bien saben los pintores, un árbol está compuesto por un gran número de otros árboles más pequeños. A partir de una estructura básica como la que aparece a la izquierda de la figura, y sucesivas repeticiones de la misma, obtenemos la forma de un árbol. Si introducimos cierta aleatoriedad entre las transiciones tendremos una réplica perfecta de un árbol cualquiera.



Como es natural, este proceso se manifiesta en otros contextos, por ejemplo en el cuerpo humano, debido al hecho de que el organismo organiza sus moléculas de la manera más eficiente para poder prolongarse a lo largo del tiempo. Ejemplos de ramificaciones los tenemos en el pulmón, el sistema nervioso o el sistema arterial. También y de manera menos evidente estructuras como la materia blanca del cerebro pueden ser estudiadas por medio de la dimensión fractal y de esta manera pueden ser diagnosticadas enfermedades degenerativas de tanta actualidad como la Esclerosis Múltiple o el Alzheimer.



Llama la atención del elevado número de personas, sin conocimientos matemáticos, que se han acercado a la geometría fractal por motivos únicamente estéticos.

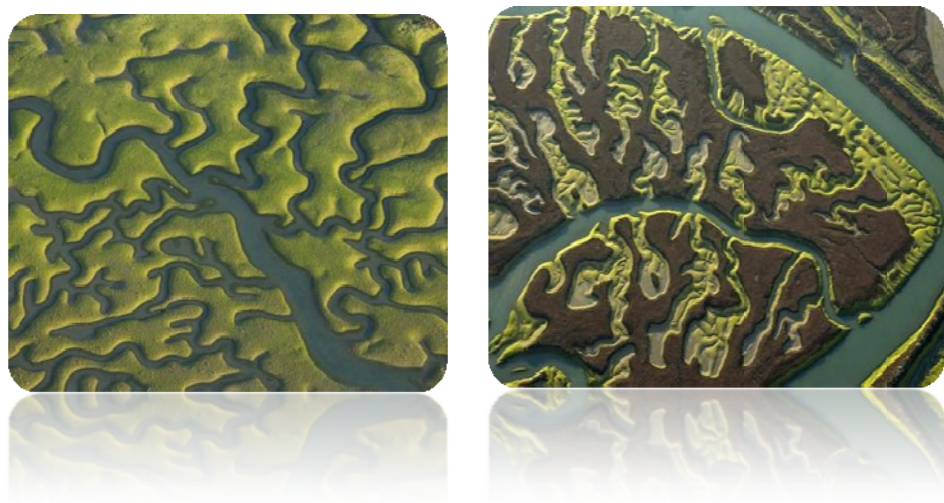


Pero aparte de estas cuestiones artística, existen poderosas razones para estudiar estas estructuras fractales, ya que el número de aplicaciones aumenta constantemente en múltiples y diversas ramas del conocimiento.

Es bastante probable que *Escher* no conociera el concepto de fractal, sin embargo desarrolló con frecuencia estructuras matemáticas muy parecidas a los fractales, ya que en un número considerable de sus obras incluye objetos relacionados con el infinito. Según comentó, su aproximación al infinito surgió del modelo de *Poincaré*, en el cual se puede representar la totalidad de una superficie infinita encerrada en un círculo finito.



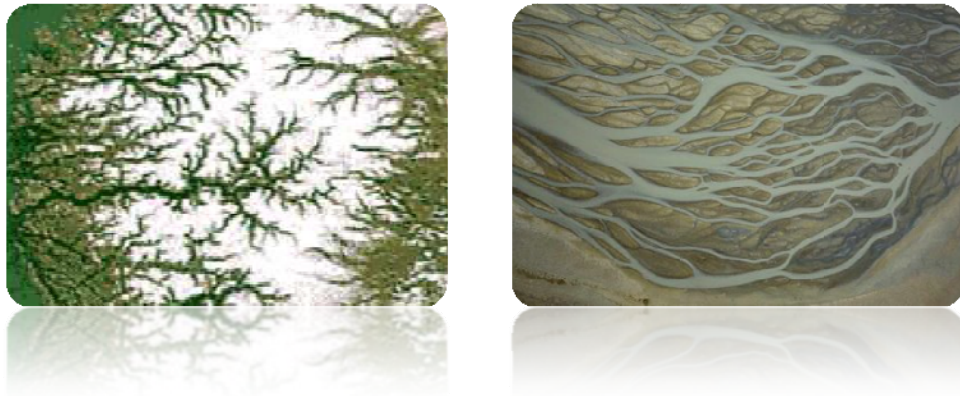
Las fronteras de separación entre diferentes medios físicos biológicos o sociales proporcionan, con frecuencia, excelentes ejemplos de sistemas que se pueden analizar mediante fractales. Un ejemplo clásico que responde a ciertos modelos de curvas fractales es el de las costas, pero hay numerosos ejemplos de este tipo, como pueden ser los bordes de una nube, una superficie montañosa, la orilla de un río o incluso la frontera entre dos países diferentes.



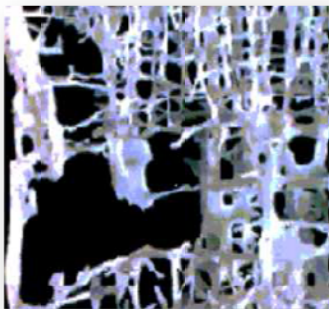
El trazado de una costa o de la orilla de un río es un proceso con rasgos comunes al de una frontera. Los dos medios en contacto, agua y tierra, están mutuamente sometidos a largos

períodos de interacción que modifican permanentemente los trazados de las costas y orillas en procesos acumulativos que operan sobre un amplio margen de escalas diferentes.

El proceso de ramificación y subramificación da su naturaleza fractal a los árboles. Pensemos, por ejemplo, en toda la red de afluentes de una determinada cuenca hidrográfica que comprende desde el río principal a las más pequeñas cortaduras por donde resbalan pequeños hilos de agua cuando llueve. Puesto que su función es drenar el agua de toda una cuenca hidrográfica, una red fluvial es un modelo natural de curva que cubre una superficie, una de las propiedades concebidas como aberrantes por los matemáticos de hace cien años y que es característica de conjuntos fractales como la curva de *Peano* o de *Hilbert*.



La Osteoporosis, es una enfermedad que para poder ser diagnosticada en un paciente tiene que estar en una fase muy avanzada. La enfermedad se detecta analizando la textura de los huesos, ya que son los que se ven afectados cuando la enfermedad ataca. Muchas veces la alteración tiene que ser muy grande para poder apreciarse y esto obliga a que los tratamientos tengan que ser muy prolongados.



Un grupo de investigadores dirigidos realizó un programa de ordenador que ayudaba en la comparación de las texturas de los huesos. El proceso era el siguiente: se toma una muestra de la textura del hueso en su estado normal y se almacenaba en la memoria del ordenador. Luego se hacía lo mismo pero ya con los pacientes a los que se pensaban que eran propensos a sufrir la enfermedad. A continuación el programa comparaba las dos texturas y podía detectarse la presencia de la enfermedad.

En la actualidad, es posible regenerar tejido, como el de la piel, pero se está en la fase inicial de poder regenerar órganos completos para poderlos utilizar en los trasplantes. El problema fundamental se encuentra en diseñar una estructura, similar al sistema circulatorio, en la que poder apoyar las células en crecimiento del órgano. Investigadores del *Harvard Medical School* y el *Massachusetts Institute of technology* están utilizando patrones fractales generados por ordenador y los están grabando en discos de silicio con el objetivo de formar un molde. A partir de estos discos se fabrican microcanales de polímeros biodegradables y biocompatibles, y posteriormente las redes se apilan para poder construir una estructura tridimensional.

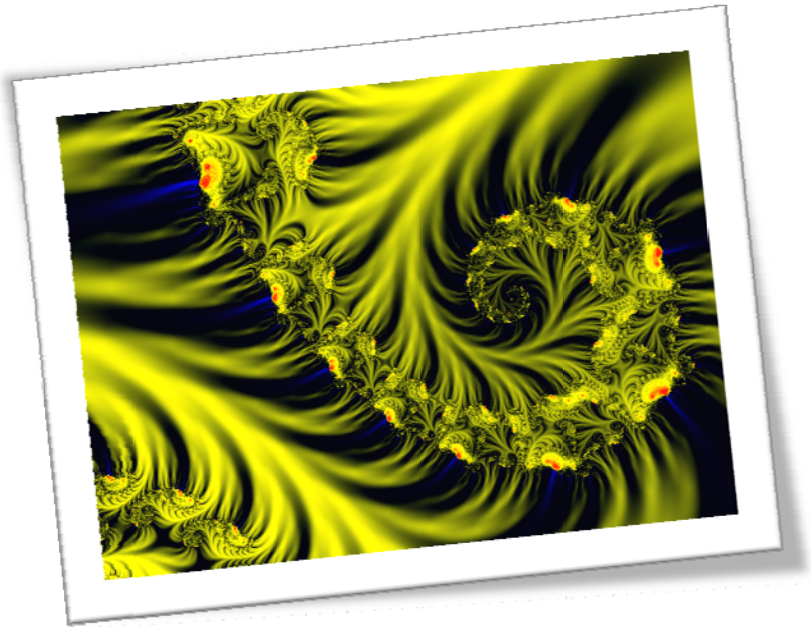


“La Filosofía está escrita en este inmenso libro que siempre está abierto ante nuestros ojos: me refiero al universo; pero no puede ser leído hasta que hayamos aprendido el lenguaje y nos hayamos familiarizado con las letras en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra.”

(Galileo, *Il Saggiatore*, 1623)

Referencias.

- <http://www.armoniafractal.com/>
- <http://www.arrakis.es/~sysifus/>
- <http://www.math.okstate.edu/mathdept/dynamics/>
- <http://www.armoniafractal.com/>
- <http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm>
- <http://www.milinkito.com/archivos/000984.php>
- Curso internet: Introducción Geometría Fractal de Pablo Brañas





*Los sentidos se deleitan con las cosas
que tienen las proporciones correctas.*

Santo Tomás de Aquino

LEONARDO PISSANO FIBONACCI.

EL NÚMERO ÁUREO

Leonardo Pisano es más conocido por su apellido *Fibonacci*. Nació en *Pisa* en el año 1170 y murió en la misma ciudad en 1250. Aunque nació en Italia, fue educado en el Norte de África, donde su padre *Guilielmo*, era un representante diplomático de la república de *Pisa* en la ciudad argelina de *Bugía*. Durante su estancia en esta ciudad estudió con profesores árabes quienes le enseñaron el cálculo posicional hindú que posteriormente introdujo en Europa sustituyendo al sistema de numeración romano. En el año 1200 regresó a *Pisa* y escribió un número importante de trabajos, actualizando algunos resultados matemáticos, así como proporcionando nuevos e interesante conceptos, entre ellos, como se ha comentado, nuestro actual sistema de numeración posicional.



Hoy en día todavía se conservan copias de algunos de sus libros, como por ejemplo, *Liber abbaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), y *Liber quadratorum*. Un problema que se encuentra en la tercera sección de su libro *Liber abbaci* llevó a la introducción de los números de *Fibonacci* y a la sucesión que lleva su nombre, y es la razón por la que aún hoy en día es tan recordado.



Supongamos que un par de conejos recién nacidos, un macho y una hembra se colocan en el campo. Los conejos son fértiles a la edad de un mes, así que al final del segundo mes una hembra puede producir otro par de conejos. Supongamos que nuestros conejos nunca mueren, y que las hembras siempre producen un nuevo par (un macho y una hembra) cada mes, desde el segundo de los meses. La pregunta que Fibonacci se hizo fue la siguiente, ¿cuántos pares de conejos tendremos en un año?

Si observamos atentamente del enunciado del problema deducimos que:

- Al final del primer mes, hay un solo par.
- Al final del segundo mes, la hembra produce un nuevo par, así que ahora tenemos dos parejas de conejos en el campo.
- Al final del tercer mes, la hembra inicial produce un segundo par, haciendo que en el campo tengamos tres pares de conejos.
- Al final del cuarto mes, la hembra original ha producido otro nuevo par y la hembra nacida dos meses antes produce su primer par, con lo que tendremos 5 pares.
- Y así sucesivamente.....

También podemos hacer aparecer el número áureo a través de una cuestión estética, que aparece en el libro *La Divina proporción* de *Luca Pacioli*. Si consideramos un segmento y preguntamos cuál es la división “más agradable” en dos partes del mismo, algunas personas pensarán que el punto medio es el más adecuado., otras en cambio



pensarán que la tercera o cuarta parte. La respuesta correcta no es ninguna de ellas, ya que la división correcta es la conocida con el nombre de **razón áurea** o **divina proporción**. Si el segmento es de longitud 1, entonces el segmento mayor tiene longitud 0.618.... A un segmento dividido de esta forma decimos que está dividido en la sección áurea. Pensemos que si u es la longitud del segmento, se tiene que

verificar:

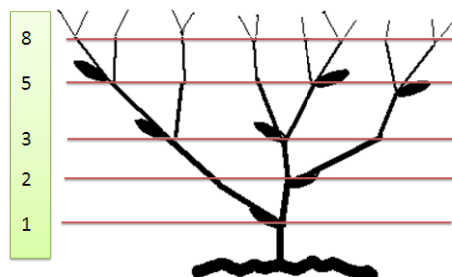
$$\frac{\text{segmento} \cdot \text{mayor}}{\text{segmento}} = \frac{\text{segmento} \cdot \text{menor}}{\text{segmento} \cdot \text{mayor}} \Rightarrow \frac{u}{u+v} = \frac{v}{u}$$

si llamamos $\phi = \frac{u}{v}$, podemos escribir:

$$1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{v}{u} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \phi$$

Simplificando, obtenemos la ecuación de segundo grado $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, que tiene como raíz el valor $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$, que como sabemos es el número áureo.

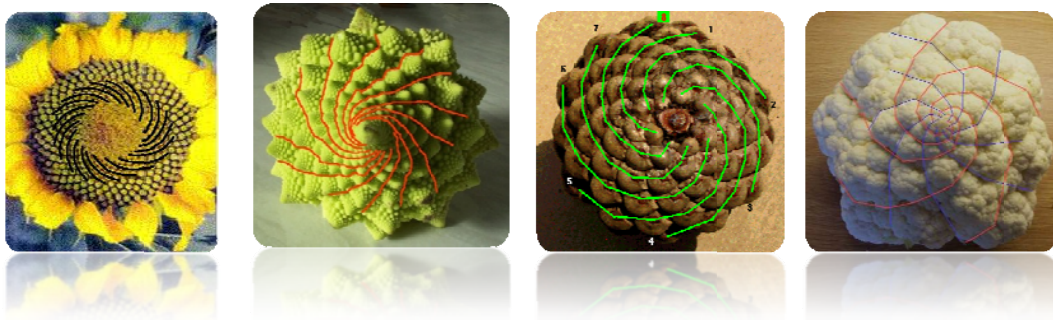
Una planta muestra los números de *Fibonacci* en el número de “puntos de crecimientos” que tiene. Supongamos que cuando una planta echa un nuevo retoño, este ha tenido que crecer dos meses antes para que se encuentre lo bastante fuerte para soportar la bifurcación. Una planta que crece mucho de esta forma es la *Achillea ptarmica*.



En muchas plantas, el número de pétalos es un número de la sucesión de *Fibonacci*. La azucena y el iris tienen tres pétalos; las rosas salvajes 5; el delphinium 8; algunas caléndulas granuladas 13; la achicoria 21; mientras que algunas margaritas pueden encontrarse con 34, 55 y hasta 89 pétalos. Algunas especies son muy precisas sobre el número de pétalos que tienen, (por ejemplo el botón de oro), pero otras tienen pétalos que están muy cerca de ellos, pero que su media es justo un número de *Fibonacci*.



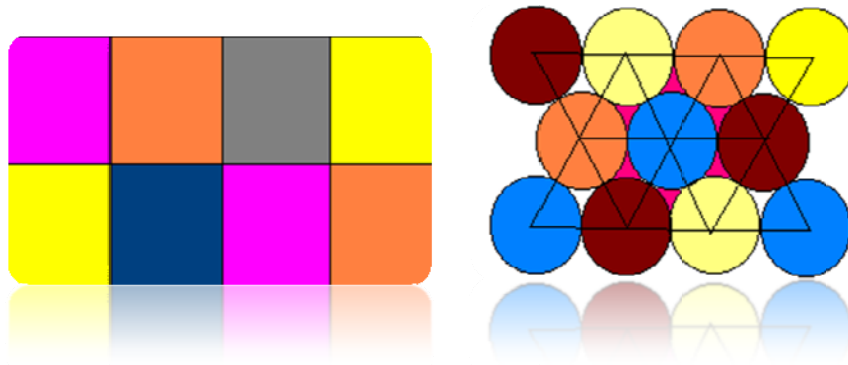
Los números de *Fibonacci* también están presentes en la disposición de las semillas de algunas plantas.



Podemos apreciar que las semillas se disponen según espirales, una de ellas a la izquierda y otra a la derecha. Si contamos la espiral de la derecha al final del dibujo, nos encontramos con que hay 34. ¿Cuántas existen hacia el otro lado? Puede comprobarse que estos dos números son vecinos en la sucesión de *Fibonacci*.

La pregunta inmediata que nos planteamos es ¿por qué sucede esto? La respuesta se encuentra detrás de un problema de optimización. Si deseamos apilar objetos de la “mejor forma posible”, la respuesta será que dependerá de la forma que posean.

Si estos objetos son cuadrados, la respuesta correcta será la figura de la izquierda. Sin embargo, si estos objetos son redondos la mejor disposición es la conocida con el nombre de hexagonal (figura derecha).

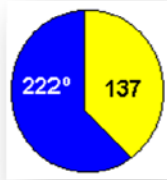


Por otro lado, muchas plantas que poseen un tallo alto tienen adheridas las hojas según un esquema bastante interesante, En efecto, se cumple la llamada ley de la Filotaxis (ciencia que estudia el ordenamiento de los elementos de una planta), “**para cada especie de plantas el ángulo que forman dos hojas consecutivas, llamado ángulo de divergencia, es constante**”.

Pero, ¿por qué la naturaleza no utiliza alguna de éstas disposiciones? La mayoría de las semillas son redondas, entonces ¿por qué no se disponen en forma hexagonal las semillas del girasol? La razón es que aunque la simetría hexagonal es la mejor manera de empaquetar semillas circulares, esto no responde a la pregunta de por qué las hojas se distribuyen alrededor del tallo o como se empaquetan las semillas del girasol (las cuales son circulares porque es la forma que encierra máxima área con una determinada longitud), cuando están creciendo en tamaño. La naturaleza utiliza el **mismo patrón** para colocar las semillas del girasol, los pétalos alrededor del borde de una flor y las hojas alrededor del tallo. Además, sigue siendo eficiente cuando la planta continúa creciendo. Los botánicos han demostrado que las plantas crecen desde un grupo diminuto de células dispuestas en el extremo de cualquier planta en crecimiento, llamado el meristemo. Hay un meristemo separado al final de cada rama o varita y allí es donde se forman las nuevas células, que crecen en tamaño, pero las nuevas células solo se forman en esos puntos de crecimiento. Las nuevas células expanden el tallo y de esta manera se produce el crecimiento.

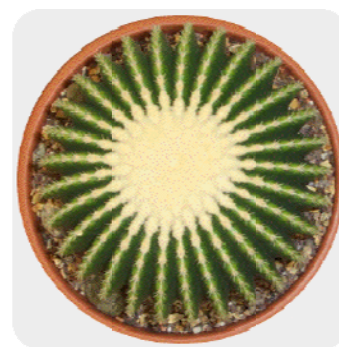
También estas células crecen en forma de espiral, como si el tallo girase un ángulo y entonces aparece la nueva célula, vuelve a girar de nuevo y entonces se forma otra nueva célula. Estas nuevas células dan lugar a una nueva rama, o tal vez a un nuevo pétalo en una flor. Lo asombroso es que un **simple ángulo fijo produce el diseño óptimo no importa como de grande sea el crecimiento de la planta**. Una vez que una semilla está situada en el girasol, esta semilla es empujada en línea recta por otra nueva semilla, pero

guarda el ángulo original en el girasol. No importa como de grande sea el girasol, las semillas siempre se empaquetarán uniformemente.



Todo esto fue intuitivo por muchos científicos en el último siglo, pero el principio de que *un ángulo fijo produce empaquetamientos uniformes sin importar el tamaño de este crecimiento*, ha sido demostrado en 1993 por los matemáticos franceses *Donady* y *Couder*. La distribución de las hojas es la misma que el de las semillas y los pétalos. En todos ellos aparece el número 0.618034 por vuelta. Si hablamos de grados serán 0.61803 de 360°, que suponen 222.492°. Pero como siempre tendemos a diferenciar el ángulo más pequeño, éste será 137.5076°. Si hay $\phi = 1.618$ hojas por vueltas, entonces tenemos la mejor manera de empaquetar, de esta manera, cada hoja recibirá la máxima cantidad de luz, proporcionando la menor sombra a las otras. También da la mejor área posible de exposición, para que cuando la lluvia caiga, baje a través de las hojas y se deposite en las raíces.

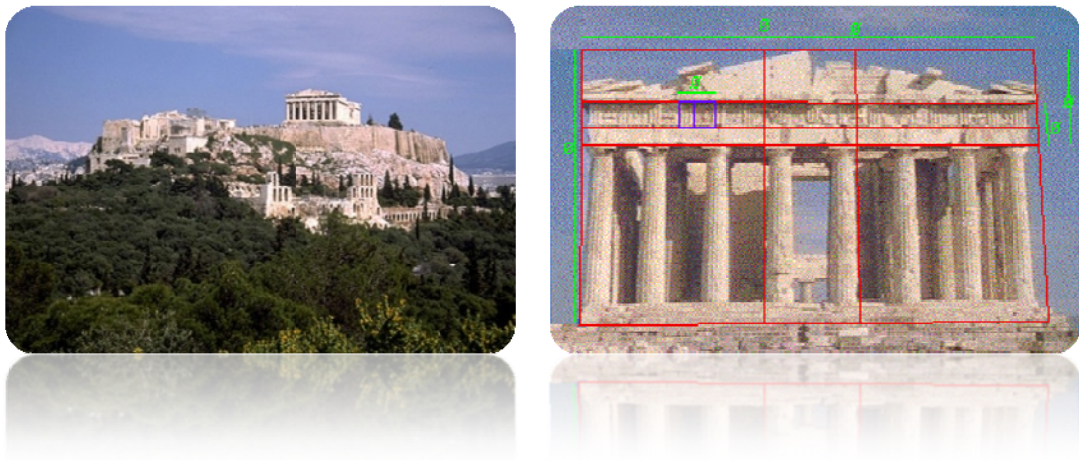
Pero debemos dejar claro que no siempre la sucesión de Fibonacci se encuentra en el número de pétalos de cualquier flor, o en el número de semillas de plantas del tipo del girasol, aunque si están cercanos a algunos términos de la sucesión de *Fibonacci*. De todos modos, en un trabajo publicado por *Jean* en 1992, de 12700 observaciones correspondientes a 650 especies de plantas diferentes, la sucesión de Fibonacci está presente en un 90 % de todas aquellas donde sus elementos están dispuestos en formas de espirales. Algunos ejemplos donde esta condición no se cumple son las imágenes que ofrecemos a continuación.



El *papiro del Rhind* del año 1650 a.c. es uno de los trabajos matemáticos más antiguos de los que tenemos noticias. En él podemos encontrar métodos y problemas usados por los antiguos egipcios, y se menciona un **cociente sagrado** que fue utilizado para la construcción de la gran pirámide de Giza, pero no está claro que este número sea el áureo. El cociente entre la longitud de una cara (desde el centro de su base a la cúspide de la pirámide) y la distancia desde el centro de la base al centro exacto de la base cuadrada de la pirámide es aproximadamente 1.62.-

No hay grabaciones exactas de los planos de los arquitectos griegos, para construir sus famosos edificios y templos. Por esta razón no sabemos si usaron deliberadamente el número áureo en su arquitectura. La Acrópolis, en el centro de Atenas, son unas ruinas que dominan a esta antigua ciudad. Su monumento más famoso es el Parthenon, un templo dedicado a la diosa Atenas construido alrededor del 430 a.c. o 440 a.c.

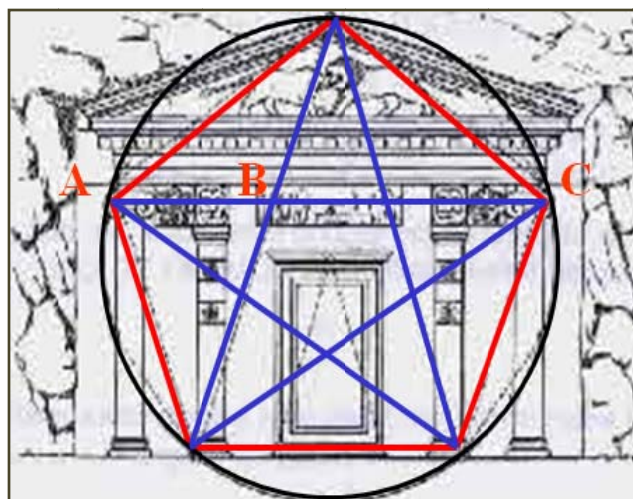
Aunque no disponemos de los planos, parece ser que fue construido sobre un rectángulo que posee $\sqrt{5}$ veces más de largo que de ancho. Esa son también las dimensiones del lado más largo del templo. Del mismo modo, la frontal está construido sobre un rectángulo áureo, que es, ϕ veces más largo que alto.



Muchos de los edificios actuales han sido construidos siguiendo el rectángulo áureo, como por ejemplo el edificio de la ONU diseñado por el famoso arquitecto *Le Corbusier* o la catedral de *Nôtre Dame* en *París*.



Los griegos obtuvieron el número áureo al dividir la diagonal del pentágono regular entre su lado. Por esta razón es posible dibujar un pentágono regular con regla y compás, como se observa en este dibujo de la tumba rupestre de Mira. La estrella pentagonal o estrella de Italia era el símbolo utilizado por los pitagóricos y les servía para reconocerse entre sí.

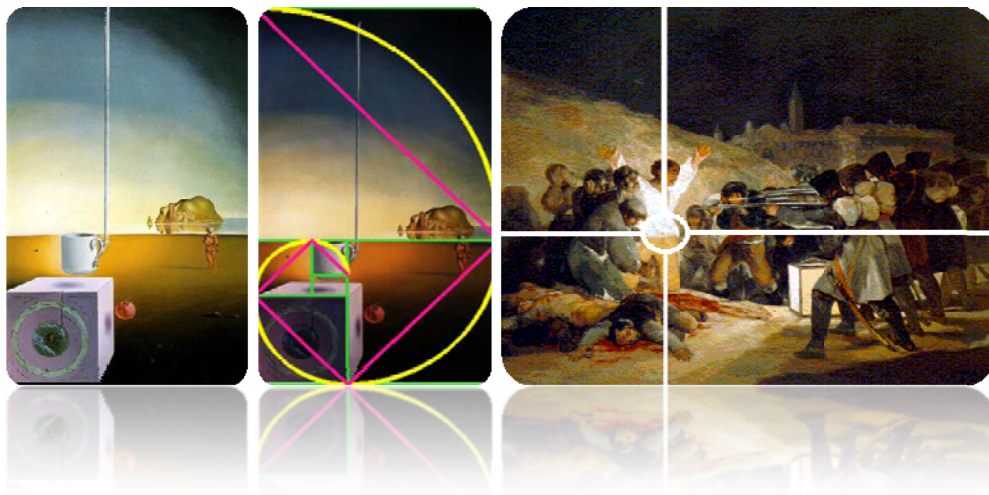


La obra de Salvador Dalí de 1947 que lleva el título de *Dela Atómica* está basada en el pentágono regular y la razón áurea. El pintor realiza un estudio meticuloso del tema, tal y como puede apreciarse en algunos de los bocetos que se conservan, e introduce a Leda y al cisne es una estrella de cinco puntas, el pentagrama místico pitagórico.



Otro cuadro realizado por Dalí basado en la proporción áurea es *Media taza gigante volante con anexo inexplicable de cinco metros de longitud*. Sus dimensiones son 50 x 31 cm., por tanto su cociente es 1.613., el número phi. Además, el cuadro se descompone en distintos rectángulos áureos con el objetivo de organizar los distintos elementos que aparecen en el mismo.

También la Divina Proporción puede encontrarse en el cuadro de *los fusilamientos del 3 de Mayo* de Francisco de Goya.



La proporción áurea está presente en multitud de objetos de la vida cotidiana como libros, tarjetas de crédito, cajetillas de tabaco, etc..., y en general en todos aquellos objetos “armoniosos” de forma rectangular.

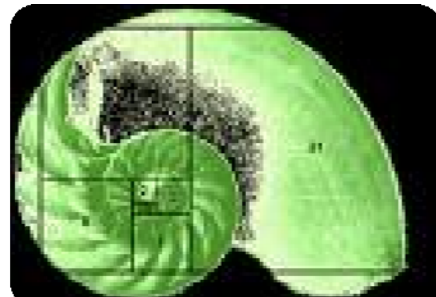
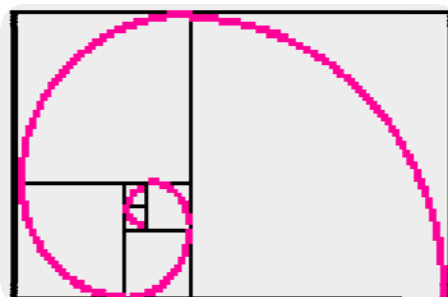
Los artistas clásicos griegos y romanos investigaron sobre el ideal de belleza en sus hermosas esculturas del cuerpo humano, los resultados de estos estudios están recogidos en el libro *La Divina Proporción* de Luca Pacioli (1509), en cuya portada aparece una famosa

ilustración de Leonardo da Vinci conocida como el hombre de Vitruvio. En este libro se propone al ser humano perfecto como aquel en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas.



La relación Φ se encuentra al realizar el cociente entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia que tiene por centro el ombligo del hombre dibujado.

A continuación, investigaremos la relación existente entre las **espirales** y la **sucesión de *Fibonacci***. Comenzamos con dos pequeños cuadrados de lado unidad, uno a continuación del otro. En su parte superior dibujamos un cuadrado de lado $1+1=2$. Procedemos de forma similar y añadimos un cuadrado de lado $2+1=3$, y así sucesivamente. Este conjunto de rectángulos, con la propiedad de que sus lados son dos números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci*, recibe el nombre de rectángulos de Fibonacci.

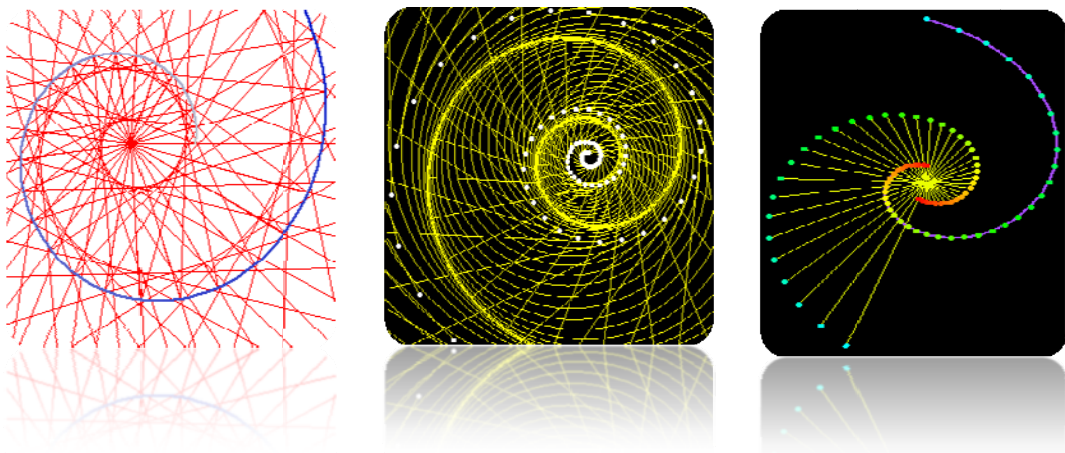


Las formas de estas espirales reciben el nombre de espirales de *Durero* y son una excelente aproximación de las espirales logarítmicas. En las siguientes figuras mostramos algunos ejemplos virtuales contruidos con ordenador, para ello se han usando funciones periódicas variando solamente tres de los parámetros.

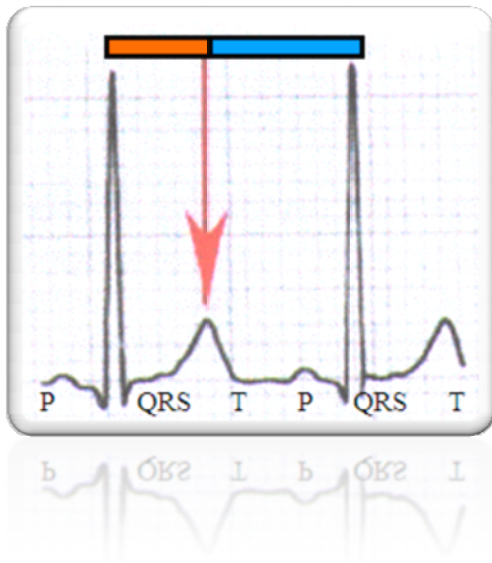


La investigaciones sobre las espirales empezaron con los griegos. La espiral logarítmica fue descubierta por *Descartes*, y sus propiedades de auto - reproducción por *Jacob Bernouilli* (1654-1705), quien pidió que la curva fuese grabada en su tumba con el siguiente epitafio “ *eadem mutata resurgo* “ (Me levantaré el mismo, aunque cambie). La espiral logarítmica describe a una familia de curvas definida de la siguiente manera. Es la curva que corta a los radios vectores con un ángulo constante.

- Sea una espiral (que es una curva, $r = f[\alpha]$, donde f es una función monótona creciente).
- Desde un punto P sobre la espiral, dibujamos una línea hacia el centro de la espiral (esta línea la llamamos radio vector).
- Si el ángulo formado por el radio vector y la tangente para cualquier punto P es constante, la curva es una espiral logarítmica.



El ritmo cardiaco es medido mediante electrocardiógrafos, que miden la diferencia



de potencial de las células cardiacas mediante el uso de electrodos, controlando los movimientos diastólicos y sistólicos del corazón. La letra P se corresponde con la despolarización de la aurícula, las letras Q,R,S representan la despolarización del ventrículo, y la T, está relacionada con la repolarización del ventrículo. Los distintos picos QRS se separan entre sí de un pico menor de tamaño T, situado a una distancia cuanto más proporcional al número áureo, el individuo será más saludable.

Para finalizar, comentaremos dos maneras interesantes de encontrar el número ϕ con una calculadora:

- **MÉTODO 1.** Procedemos de la manera siguiente:

- Iniciamos el proceso introduciendo el número 1.
- Calculamos su recíproco, y le añadimos 1.
- Calculamos su recíproco, y le añadimos 1.
- Repetimos el proceso.

Recordemos que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, y por lo tanto el método está plenamente justificado. Observemos que inicialmente no podemos tomar como valor inicial el 0 o el -1.

- **MÉTODO 2.** Procedemos de la manera siguiente:

- Introducimos cualquier número (entero o racional) pero más grande que (-1).
- Añadimos 1, y calculamos su raíz cuadrada.
- Añadimos 1, y calculamos su raíz cuadrada.
- Y así sucesivamente

Sabemos que $\phi^2 = \phi + 1$, por lo tanto $\phi = \sqrt{\phi + 1}$. Pero hay otro valor que cumple la ecuación $x^2 = x + 1$, además del ϕ , y que juega un papel interesante si comenzamos con el valor -0.618034 .

Referencias.

- Arte y naturaleza en clave geométrica. María Encarnación Reyes Iglesias
- <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- http://www.isftic.mepsyd.es/formacion/enred/web_espiral/naturaleza/vegetal/fibonacci/fibonacci.htm
- <http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm>
- <http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Curiosid/Rc-25/RC-25.htm>
- http://www.portalplanetasedna.com.ar/divina_proporcion.htm
- <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/Libros/LiburuakDet.asp?Id=353>
- http://201.116.18.153/laciencia/matemáticas_sec/mg_fibonacci/fibonacci.htm
-



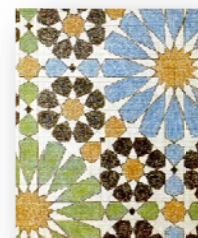


MAURITIS CORNELIUS ESCHER

Escher nació en *Leeuwarden* (Holanda) en el año 1898, era el hijo menor de un ingeniero, y falleció en *Baarn* (Holanda) en 1972. En su formación básica tuvo dificultades con las Matemáticas:

[...] durante el bachillerato en Arnhem salí muy mal en aritmética y álgebra porque tenía, y aún tengo, gran dificultad con la abstracción de números y letras. Cuando, más adelante, en estereometría [geometría de los sólidos], se apeló a mi imaginación, las cosas mejoraron un poco pero en la escuela nunca salí bien en esa materia. Pero nuestro camino por la vida puede dar giros extraños.

Empezó los estudios de Arquitectura y Artes Decorativas, pero no llegó a graduarse. Su interés se centró en las artes gráficas adquiriendo una técnica excepcional en los grabados sobre madera y en las litografías. A partir del año 1922 viajó por Italia, Suiza, y en especial España, donde visitó en repetidas ocasiones la ciudad de Granada y en especial



la Alhambra. Los bocetos que elaboró sobre los mosaicos de la Alhambra tuvieron una gran influencia en su obra posterior. En 1924 escribió:

[...] por primera vez imprimí sobre una tela un motivo de un solo animal grabado en madera que se repite de acuerdo con cierto sistema, adhiriéndome al principio de que no queden espacios en blanco. Presenté esta tela junto con mis otras obras pero no tuve éxito con ella.

Durante gran parte de su vida dependió económicamente de sus padres. En 1951 empezó a vender, a muy buen precio, parte de su obra lo que le permitió tener en la última etapa de su vida una economía muy saneada, trabajando por encargo en temática y soportes muy variados (litografías, ilustraciones libros y revistas, sellos,... etc.)

Es muy popular entre los matemáticos debido a que un número importante de sus obras están basadas en figuras imposibles, teselaciones y mundos irreales. Parte de su producción (se estima en 2000 dibujos) puede verse en el museo, que con su nombre, se encuentra en La Haya.



En 1922 realizó su obra, de título *Ocho cabezas*, en donde, por primera vez, se presenta una división regular del plano (teselaciones). Sobre esta técnica comentaba:

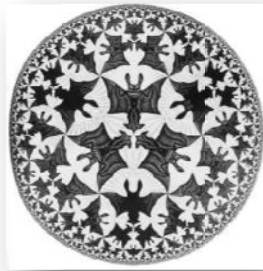
[...] sigue siendo una actividad extremadamente absorbente, una verdadera manía a la cual me he vuelto adicto y de la cual muchas veces me es difícil separarme.

En 1937, en una reunión familiar, enseñó sus trabajos sobre la división regular del plano a su hermano *Berend*, geólogo y profesor universitario, quien supo detectar la conexión de estos dibujos con la cristalografía. Los artículos que *Berend* le entregó fue el primer contacto de *Escher* con las matemáticas, y fueron fuente de inspiración para una de sus colecciones que culminaría en 1941 en su cuaderno *División regular del plano con polígonos asimétricos congruentes*.

En 1956, ampliando sus investigaciones sobre la división regular del plano, empieza a explorar el infinito basándose en el modelo de *Poincaré*, tratando de representar una

superficie infinita dentro de un círculo finito. En 1958 y a través de un artículo de Coxeter, con el que llegó a tener una gran amistad, aprendió las técnicas de las teselaciones hiperbólicas, enmarcando sus dibujos en figuras circulares, cuadradas u otras. Escribió:

[...] descubrí una vez más que la mano humana es capaz de ejecutar movimientos pequeños pero totalmente controlados siempre y cuando el ojo vea con suficiente claridad lo que hace la mano.



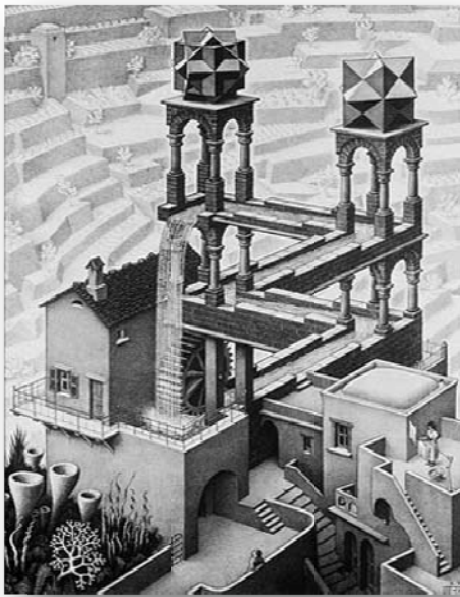
1.- Límite circular III (xilografía). 2.-Límite circular IV' (xilografía). 3.-Slangen (grabado en madera)

Aunque muchas de sus obras se encuentran dibujadas en el plano, siempre sintió una gran fascinación por las figuras tridimensionales y por tal motivo en algunos de sus dibujos puede apreciarse el paso de dos a tres dimensiones. Comentó:

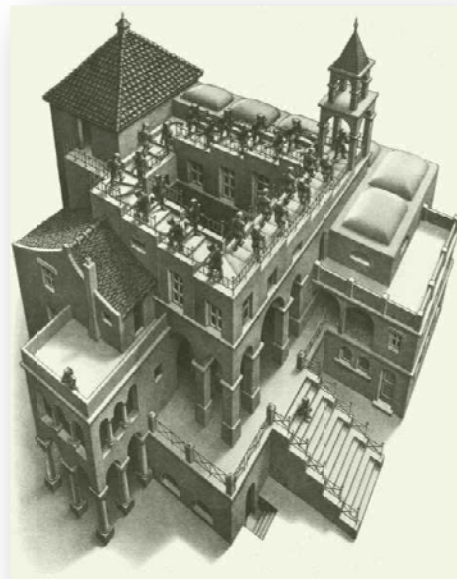
[...] la “forma plana” me irrita -siento como si yo estuviera gritándole a mis figuras: ¡Son ustedes demasiado ficticias para mí; se quedan ahí estáticas y congeladas juntas; hagan algo, salgan de allí y muéstrenme de lo que son capaces!” Así que hago que salgan del plano. Pero ¿en realidad lo hacen? Al contrario, soy deliberadamente inconsistente, sugiriendo la plasticidad del plano mediante luces y sombras.



Escher comentaba, a pesar de no poseer estudios matemáticos, que se encontraba más próximo a los matemáticos que del resto de los artistas. Existe una rama de las matemáticas, la Topología, de la que se encontraba especialmente atraído. De manera informal podemos definir la Topología como aquella parte de las Matemáticas interesada en estudiar la proximidad, los orificios que presenta un objeto, su textura, y la comparación entre objetos. Al final de su vida Escher investigó en este campo siguiendo las enseñanzas del gran matemático *Penrose*, elaborando algunas de sus famosas figuras imposibles, relacionadas con ciertas ilusiones ópticas.



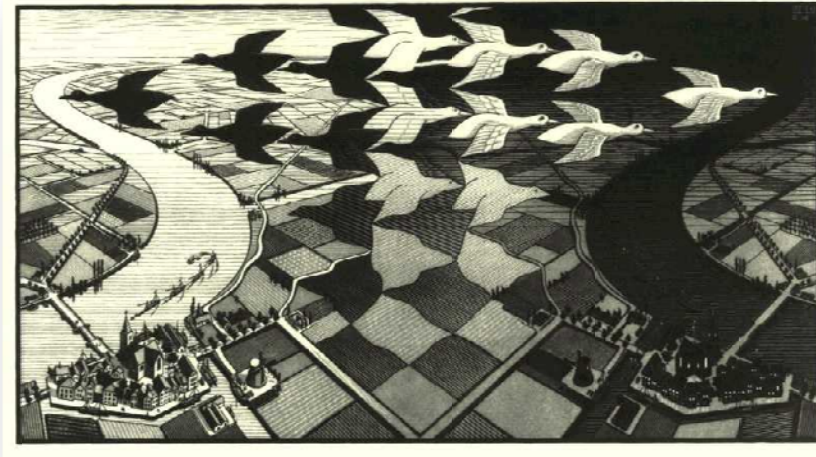
1.- *Cascada* (1961)



2.- *Subiendo y bajando* (1960)

Uno de los primeros dibujos relacionados con la Topología es su conocida obra sobre la cinta de *Möbius*, que tiene la curiosa propiedad de ser una superficie con una sola cara, de tal manera que si una hormiga camina a través de ella recorrerá su cara externa interna sin atravesar ningún borde. Esto es, la hormiga siempre camina por la misma cara.

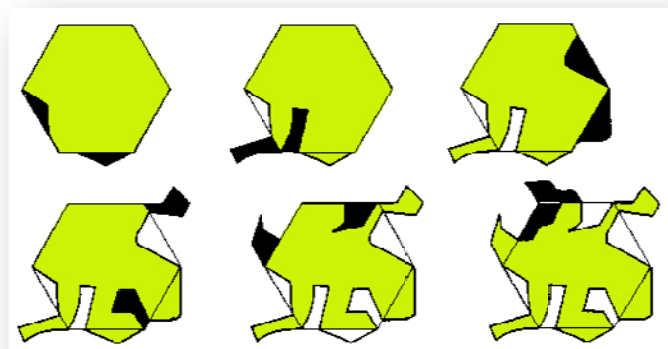
Para finalizar el análisis de sus obras, comentaremos una parte importante de la producción de *Escher*, conocida con el nombre genérico de metamorfosis. En estos diseños se narra una historia partiendo de un determinado objeto y su transformación en otro totalmente diferente.



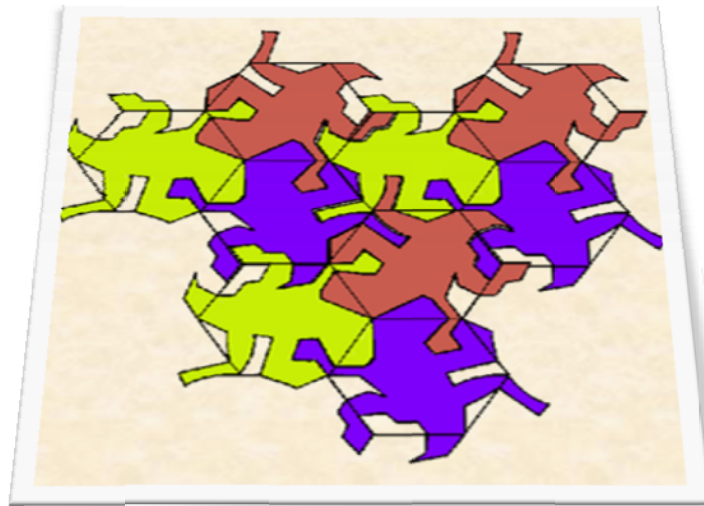
En resumen, y según *Bruno Ernst*, uno de sus biógrafos, sus obras pueden clasificarse en tres temas y varias categorías:

- **La estructura del espacio** – Incluyendo paisajes, compenetración de mundo y cuerpos matemáticos.
- **La estructura de la superficie** – Metamorfosis, ciclos y aproximaciones al infinito.
- **La proyección del espacio tridimensional en el plano** – Representación pictórica tradicional, perspectiva y figuras imposibles.

A continuación describiremos la manera en que Escher construía algunos de sus mosaicos más famosos. El punto de partida es deformar el polígono de un mosaico regular, como por ejemplo un triángulo equilátero, un cuadrado o un hexágono regular. Posteriormente, se trata de eliminar un trozo de uno de los lados del polígono y se añade el mismo trozo a otro de sus lados., y se procede de forma similar hasta obtener la figura deseada (un reptil, un caballo, etc.)



como consecuencia del método utilizado la figura obtenida encajará con el resto teselando el plano y formando un mosaico.



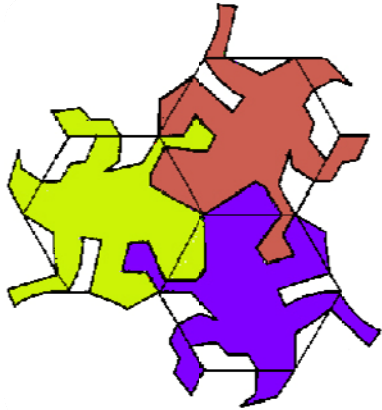
Referencias.

- <http://es.wikipedia.org/wiki/Escher>
- <http://www.astroseti.org/imprime.php?num=4367>
- http://www.uv.es/~buso/escher/index_es.html
- <http://www.mcescher.com/>
- <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-02/escher2.html>
- http://personal.telefonica.terra.es/web/emiliomartin2002/mosaicos_y_teselaciones.htm
- <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/escher.htm>
- <http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/>



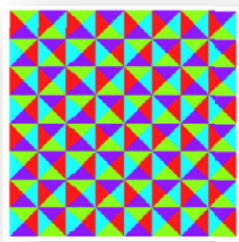
"¡Cómo me gustaría aprender a dibujar mejor! Hacerlo bien requiere tanto esfuerzo y perseverancia... A veces los nervios me llevan al borde del delirio. Sólo es cuestión de batallar sin descanso con una autocrítica constante e implacable. Pienso que crear mis grabados sólo depende de querer realmente hacerlo bien. En su mayor parte algunas cosas como el talento son naderías. Cualquiera escolar con unas pequeñas aptitudes podría dibujar mejor que yo. Lo que normalmente falta es el deseo incontenible de expresarse, apretando los dientes con obstinación y diciendo:

Maurits C. Escher

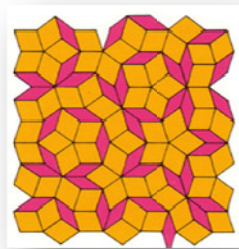


MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

Una tesela es una pieza que en unión de otras idénticas es capaz de rellenar el plano, de tal manera que no se solapen, y que no existan fisuras entre ellas. El dibujo que se obtiene recibe el nombre de **mosaico** o **teselación**. Es lo que vulgarmente se conoce como enlosar una habitación con un tipo concreto de baldosas. Desde la antigüedad los seres humanos han hecho uso de esta técnica geométrica, entre otras cosas, para decorar sus casas y utensilios domésticos.



1.- *Mosaico periódico*



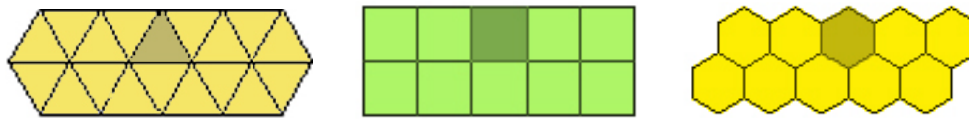
2.- *Mosaico no periódico*



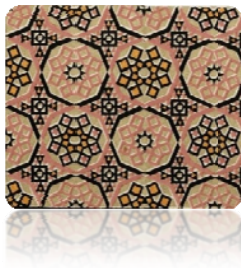
3.- *Mosaico de Escher*

Existen un número casi infinito de teselas, pero de todas ellas las que despiertan un mayor interés entre los matemáticos son las **poligonales**. Una teselación diremos que es **regular** cuando las teselas que lo forman son polígonos regulares idénticos. Puesto que en cada uno de los vértices la suma de los ángulos debe ser de 360 grados, entonces sólo

existen tres tipos de teselación regular, las mallas formadas por triángulos equiláteros, por cuadrados y por hexágonos regulares.



Un matemático ruso, *Fedorov*, demostró que de las infinitas combinaciones posibles para hacer mosaicos periódicos, sólo existen 17 estructuras elementales (grupos de simetrías) que combinándolas adecuadamente dan origen al resto de las combinaciones. Estos estudios sobre los grupos de simetrías tienen su origen en la Cristalografía analizando la forma en que cristalizan los cristales. Mucho antes de que este descubrimiento fuese hecho, los árabes en la Alhambra de Granada utilizaron exactamente estas 17 estructuras diferentes para sus bellas decoraciones de sus edificios. Estos son algunos ejemplos de mosaicos árabes.



1.- $p4m$

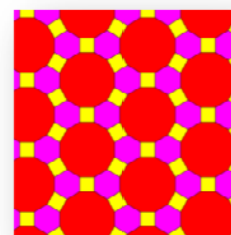
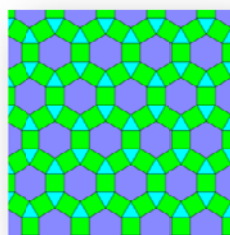
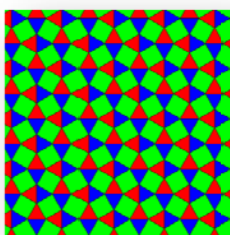


2.- pgg

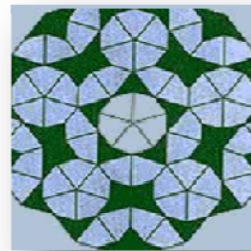
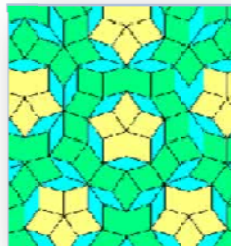
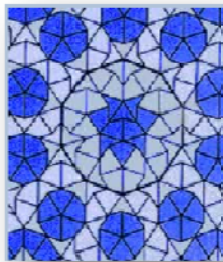
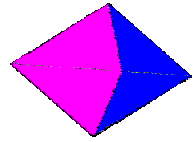


3.- $p6$

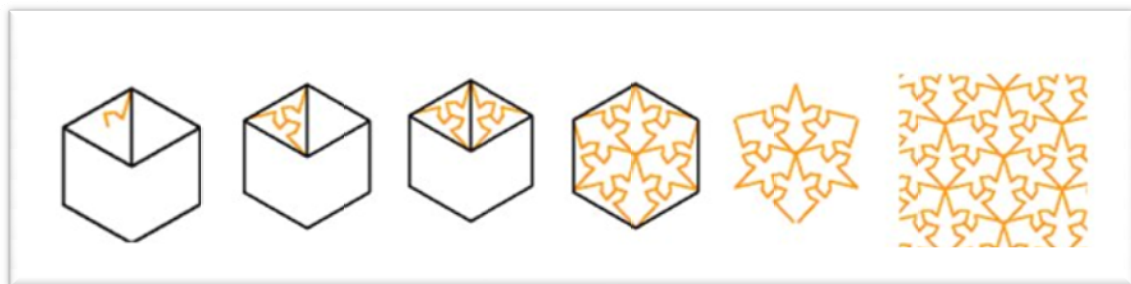
Un **mosaico semiregular** es aquel que está formado por dos o más polígonos regulares. Existen 8 teselaciones semiregulares diferentes. Estas son algunas de ellas:



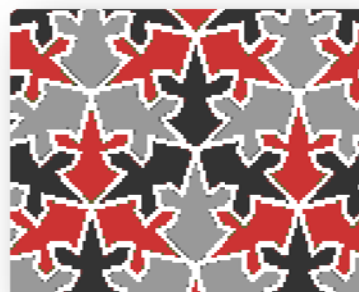
Otros mosaicos no regulares y muy famosos son los llamados **mosaicos de Penrose**. Para su construcción se toma un rombo de 72 grados y se divide en dos partes, teselas conocidas como el dardo y la cometa, de tal manera que su diagonal mayor se divide en dos trozos según la proporción áurea.



Naturalmente a partir de estas teselas regulares se pueden obtener otras muchas teselaciones, por ejemplo, la que se muestra en las figuras siguientes.

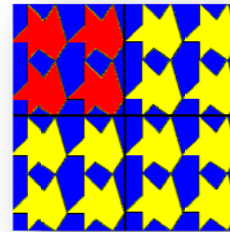
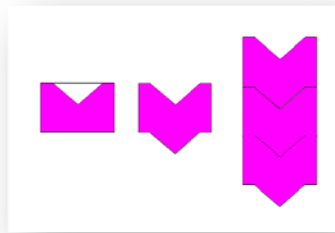


que una vez coloreada adopta la siguiente forma,

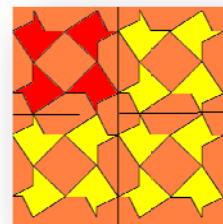
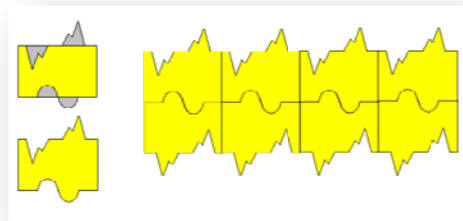


La manera en que se ha conseguido construir estos mosaicos está basada en diferentes tipos de **movimientos en el plano**, como son:

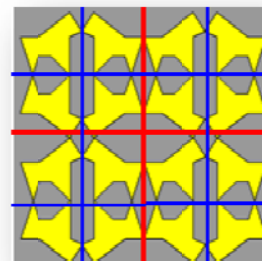
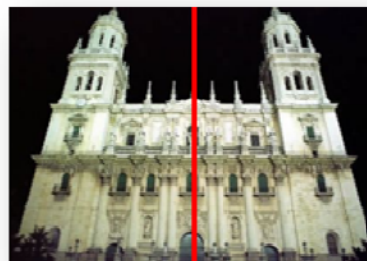
- **Traslaciones:** consiste en elegir un vector $\mathbf{v}$ y asignar a cualquier punto P otro punto P' de forma que el vector PP' tiene el mismo módulo, dirección y sentido que el vector inicial $\mathbf{v}$. Las traslaciones implican deslizamientos y desplazamiento, el tamaño la forma y la orientación de la figura no se modifican.



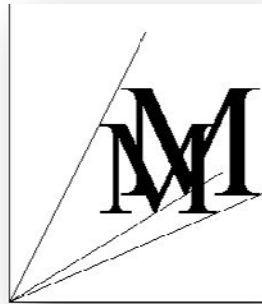
- **Giros de centro O y ángulo α :** asocia a todo punto P otro punto P', de tal forma que la distancia de O a P es la misma que la de O a P', y el ángulo POP' es igual a α . El giro implica un cambio de orientación de la figura.



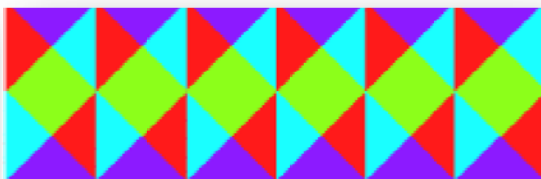
- **Simetrías respecto de un eje:** asocia a cada punto P otro punto P', de tal manera que el eje es la mediatriz del segmento PP'.



- **Homotecias** de centro C y razón r : asigna a un punto P el punto P' tal que los puntos CPP' están alineados y la distancia de C a P' es r veces la distancia de C a P . Conserva los ángulos y las formas, pero no conserva las distancias.



Los **frisos** se obtienen repitiendo un dibujo de forma periódica a lo largo de una dirección. Únicamente existen siete modelos de friso, que se clasifican según el algoritmo de *Rose-Stafford*, de acuerdo a una determinada notación. La letra **p** significa repetición por traslación a lo largo de una línea (todos los frisos empiezan por esta letra), la **m** hace referencia a la simetría especular (espejo), y la letra **a** hace referencia a una simetría por desplazamiento. Cuando no hay giro de 180 grados se coloca un **1** y en caso contrario un **2**.



Las siguientes figuras que estudiaremos son los **rosetones** o grupos de *Leonardo de Vinci*, puesto que fueron muy usados por el ilustre artista del renacimiento en las ventanas de sus capillas. Fijada una determinada figura (llamada pétalo), se gira en torno a un punto fijo (centro) rellenando todo el espacio que rodea el centro. Si el rosetón tiene ejes de simetrías entonces se dice que pertenece al grupo de los diédricos D_n , y en caso contrario se dice que pertenece al grupo de los cíclicos C_n , donde el n indica el orden del giro.



1.- *Notre Dame*



2.- *Rosetón cíclico de orden 5*



3.- *Iglesia San Miguel*

Referencias.

- http://personal.telefonica.terra.es/web/emiliomartin2002/mosaicos_y_teselaciones.htm
- <http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates45/opciones/sabias/Expo%20Teselaciones%20recortables%200405/index.htm>
- http://www.iescomercio.com/cursos/Russell_en_%20Atenas/teselaciones.htm#Indice
- <http://www.telefonica.net/web2/m-p/mo.htm>
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/ies_sierra_magina/webquest/MAtquest/23%20proceso.htm
- http://personal.telefonica.terra.es/web/imarti22/actividades/actividades/mosaicos/marco_mosaicos.htm
- http://mosaic.uoc.edu/practicas/Matematicas/omerinop_p1/omerinop_p1/mosaicos.htm
- http://descartes.cnice.mec.es/descartes2/previas_web/materiales_didacticos/grabados_de_escher/indice.htm
- http://mosaic.uoc.edu/practicas/Matematicas/igarciamanu_pec1/pec1.swf
- <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/mosaicos/mosaicos.htm>
- <http://www2.spsu.edu/math/tile/index.htm>

