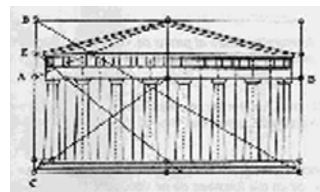
Breve Semblanza de la Proporción Áurea

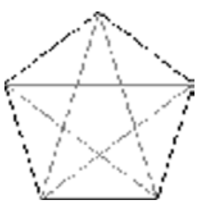
Ricardo Erick Villarreal Azúa

Antecedentes históricos



En la historia de las matemáticas se establece que, alrededor del año 4700 A.C., los egipcios conocían la proporción Φ (phi) denominada la proporción sagrada. Esta medida fue utilizada por éstos, entre otras cosas, en el diseño de una de las siete maravillas del mundo antiguo: las pirámides de Gizeh. La proporción utilizada para dicha costrucción es 2Φ obtenida del cociente entre la altura de cualquiera de los tres triángulos que conforman las pirámides y uno de sus lados.

Los griegos por su parte también utilizaron la proporción áurea Φ en la construcción de importantes edificios tales como el Partenón. Asimismo hicieron intervenir a Φ al esculpir obras artísticas que perduran hasta nuestro días.



Pitágoras, filósofo y matemático griego, nació en la isla de Samos. Fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios: Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. La estrella pentagonal o pentágono estrellado era, según la tradición, el símbolo de los seguidores de Pitágoras. Los pitagóricos pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico donde sólo tenían cabida los números fraccionarios. La casualidad hizo que en su propio símbolo se encontrara un número con características muy singulares: Φ.

La armonía entre las proporciones para hacer un trazado del hombre perfecto se plasma en el dibujo que Leonardo da Vinci hizo para ilustrar, en 1509, el libro La Divina Proporción de Luca Pacioli. La relación Φ está también presente en esta obra y se encuentra al realizar el cociente entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia que tiene por centro el ombligo del hombre dibujado.

reloj o perfecta sincronía

El cuadro de Dalí Leda atómica, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico.

En la actualidad este número continúa apareciendo en otros campos del conocimiento y la creación. Existen, por ejemplo, estudios psicológicos que afirman que la mayoría de las pesonas prefieren de manera inconsciente artículos diseñados con base en la proporción Φ ; son ejemplo las tarjetas de crédito que usamos actualmente.
¿Cómo contextualizar todo lo anterior si no hemos definido ni matemática ni geométricamente quién es Φ ? A continuación se realiza un estudio de la proporción Φ y de algunas de sus relaciones matemáticas y geométricas.

Definición Geométrica

La Proporción áurea consiste en cortar una línea en dos partes desiguales de tal manera que el segmento MAYOR sea a TODA la línea como el MENOR lo es al MAYOR.
Para hacer más claro el concepto analicemos el siguiente ejemplo:
Una línea de cualquier medida puede ser dividida o seccionada de tres maneras diferentes:

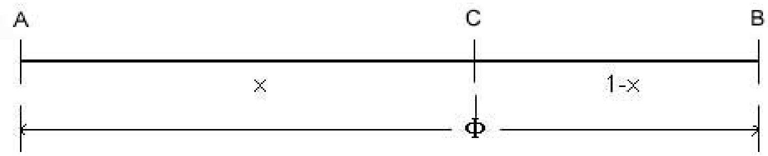
1. Si se corta por la mitad en partes iguales se tiene una simetría simple, monótona, de relación constante y ritmo estático.
2. Si se divide por cualquier parte se produce una asimetría irracional, sin armonía, sin ritmo, ni lógica.
3. Existe una forma de seccionarla de manera que los dos segmentos resultantes guarden una relación constante y proporcional, con ritmo dinámico y recíproco, armonía equilibrada y proporción áurea.

Ésta es la Proporción Áurea geométrica cuyo exponente aritmético es conocido como Número de Oro.

Cálculo aritmético de la proporción Φ o Número de Oro.

Dado un segmento de recta AB se busca un punto C tal que resulte:

$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow (AC)^2 = (AB)(CB)$. Si fijamos las longitudes AB = 1 y AC = x

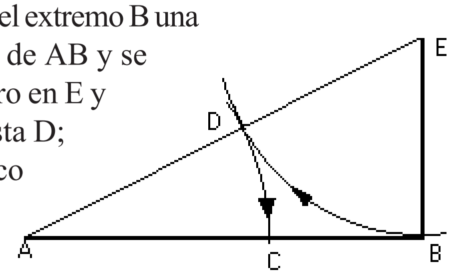


tenemos que $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 - x \therefore x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ y dado que es una longitud y por lo tanto es positiva $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 0.618033929\ldots$ (1) y su recíproco es: $\frac{1}{x} = 1.61803392\ldots$ De ahí que el mayor (AC) sea al todo (AB) como el menor (CB) lo es al mayor (AC). Ésta relación es conocida como número de oro o .

Φ

Construcción geométrica de la proporción áurea

Para dividir en Φ la línea AB, se levanta en el extremo B una perpendicular que mide de radio la mitad de AB y se obtiene E; luego se une A con E; con centro en E y con radio EB se traza un arco desde B hasta D; por último, con radio AD, trazamos un arco que va desde D hasta señalar C, que es el punto de la proporción áurea buscada.



Sucesiones de Fibonacci

El matemático Leonardo Pisiano (o Leonardo de Pisa), alrededor del año 1202 en su Liber Abaci, presentó al mundo europeo la notación arábiga de los numerales y los algoritmos para la aritmética. En este estudio también surgió la sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . ., la cual puede definirse en forma recursiva como $F_0=0$, $F_1=1$, y $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, n >= 0. Como Leonardo era hijo de Bonaccio la sucesión recibió el nombre de los números de Fibonacci (Filius Bonacci es la forma en latín de "hijo de Bonaccio").

¿Qué relación existe entre la serie de Fibonacci y la Proporción Áurea? La relación no es inmediata pero es interesante.

Primero partamos de las siguientes series basadas en la de Fibonacci:

$F_n=\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$; $F_a=\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$

Después definimos una sucesión como el cociente de las dos sucesiones de Fibonacci; esto es:

$$\frac{F_n}{F_a}=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\ldots\right\}$$

Curiosamente la proporción de la que hemos estado hablando, la proporción áurea, también aparece en esta sucesión. Si observamos los términos 15 y 16 de la sucesión obtenemos los siguientes cocientes: $\frac{337}{610}\approx 0.1618033\ldots;\frac{610}{987}\approx 0.618034\ldots$ Si se compara el valor del término 16 con (1) se ve que este último valor sólo difiere en la sexta cifra decimal. Por ser Φ irracional, se comprende que continuando con la sucesión F_n/F_a resulta posible aproximar Φ con el número de cifras decimales que se desee.

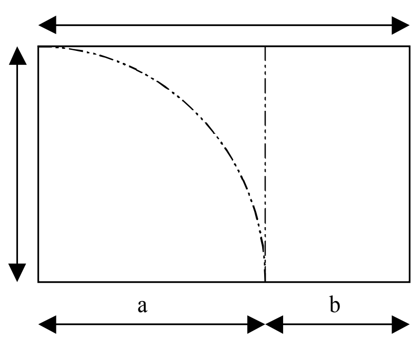
Rectángulo de oro

El rectángulo de oro es aquél en el que la relación entre la longitud de la base (a + b) y la altura (a) satisfacen la relación $\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}=\Phi$ al dividir el segundo miembro entre a/a

tenemos $\frac{a}{b}=\frac{1}{1+\frac{b}{a}}$; o bien

$$\Phi=\frac{1}{1+\Phi}\Rightarrow\Phi^2+\Phi-1=0\Rightarrow\Phi=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

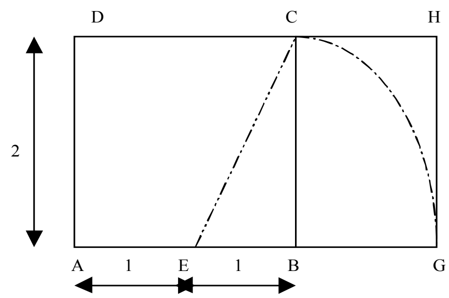
que es igual a (1).



Construcción del rectángulo de oro (áureo).

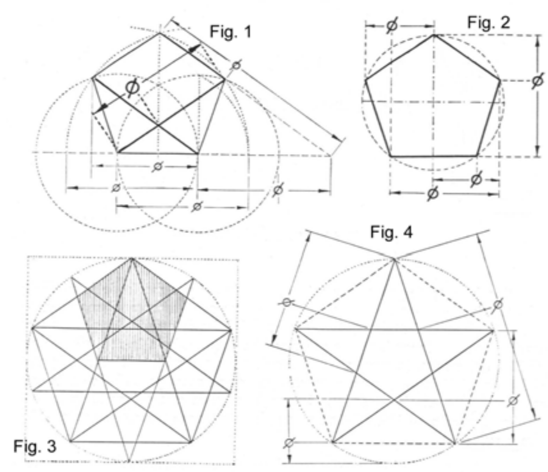
Puede construirse de la siguiente manera:

1) Constrúyase un cuadrado ABCD (por conveniencia de 2 unidades en cada lado.)
2) Divida la base AB en dos partes iguales, de lo cual se define el punto E.
3) Una E con C.
4) Trace un arco de circunferencia con radio EC y centro en E. Con esto se define el punto G en la prolongación de AB.
5) Finalmente, se obtiene el siguiente esquema:



Pentágonos regulares y la proporción áurea

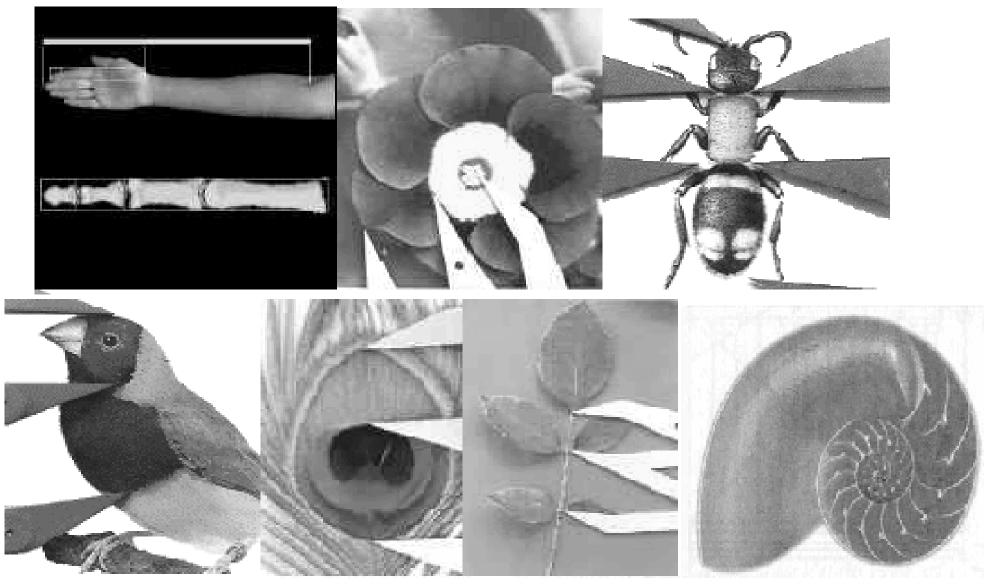
El pentágono es la figura geométrica más extraordinaria desde el punto de vista del análisis áureo. Casi todas las relaciones naturales de su forma, medidas y trazas están en términos de F. En la figura 1 podemos ver las proporciones áureas del pentágono desde su construcción. En la figura 2 tenemos otras proporciones áureas del pentágono. Todas las figuras que surgen de la subdivisión del pentágono tienen sus mismas propiedades nobles (Fig. 3 y 4.) Lo más sorprendente son sus diagonales las cuales se cruzan dando lugar a una estrella áurea de cinco puntas, que es la misma utilizada por Dalí en la pintura presentada anteriormente y el símbolo de los pitagóricos.



reloj o perfecta sincronía

Proporción áurea presente en la naturaleza

Las siguientes figuras son más que elocuentes por sí mismas para observar la presencia de la proporción áurea en la naturaleza.



Conclusión

La proporción áurea tiene presencia en muchos otros ámbitos tales como la trigonometría (donde se encuentra un triángulo áureo) y la música (en muchos ritmos existe una gran cantidad de relaciones armónicas) y representa, por lo tanto, una fuente inagotable de relaciones que existen a nuestro alrededor y de las cuales muchas veces no estamos concientes.

Recomendaciones bibliográfícas:

[1] *La composición áurea en las artes plásticas,* Pablo Tolsto, Librería Hachette S. A.
[2] *Reflexiones acerca de la sección áurea*, Boletín Matemáticas y Cultura 148 - 151, Facultad de Ingeniería, U. N. A. M. (1995), Ing. Arturo Delgado Rodríguez.
[3] *The divine proportion*, H. E. Huntley, Dover Publications. Inc.
[4] *Antología de las matemáticas*, Introducción y selección Miguel Lara Aparicio, Edit. U. N. A. M.