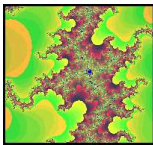


# MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

---

## Modelo presa-depredador II <sup>1</sup>

---



En general, un modelo del tipo presa-depredador responde al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x f(x, y) \\ y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = y g(x, y) \end{cases}$$

donde  $y(t)$  es el número de depredadores en el tiempo  $t$ , y  $x(t)$  es el número de presas.

### Introducción

Para elaborar nuestro modelo tendremos en cuenta las siguientes hipótesis:

1. En ausencia de los depredadores las presas crecen según un modelo logístico con una tasa de crecimiento de  $2/3$  día<sup>-1</sup> y una capacidad de carga de 4 presas
2. El efecto de depredación sobre las presas viene dado por la función

$$\delta(x(t), y(t)) = \frac{x(t)y(t)}{1 + x(t)}$$

---

<sup>1</sup>Basado en el modelo propuesto en Lecture 28. Math 19. de T. Judson. 2005

3. Los depredadores evolucionan según un modelo logístico con una tasa de crecimiento  $r$  día<sup>-1</sup> y una capacidad de carga variable que coincide con el número de presas presentes en cada momento  $x(t)$

Por tanto, la dinámica del sistema está controlada por el sistema,

$$\begin{cases} x'(t) = \phi(x, y) = \frac{2}{3}x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{4}\right) - \frac{x(t)y(t)}{1+x(t)} \\ y'(t) = \varphi(x, y) = ry \left(1 - \frac{y(t)}{x(t)}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Observemos que cuando el número de presas es muy pequeño, el término de depredación  $\delta(x, y)$  coincide con  $xy$  que es la probabilidad de que una presa se encuentre con un depredador. Por otro lado, si el número de presas es elevado, entonces  $\delta(x, y)$  es aproximadamente igual al número de depredadores.

### Estudio cualitativo. Puntos de equilibrios

Para estudiar el comportamiento de ambas poblaciones procederemos en primer lugar a realizar un estudio cualitativo del sistema (1). Para ello, es necesario en primer lugar encontrar las isoclinas nulas.

- Las correspondientes a  $x(t)$  se calculan resolviendo la ecuación  $x'(t) = 0$ , que coinciden con el eje  $x = 0$  y la parábola  $y = -\frac{1}{6}(x^2 - 3x - 4) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-4)$
- Las isoclinas de  $y(t)$  son el eje  $y = 0$  y la recta  $y = x$

Las intersecciones de estas isoclinas definen a los puntos de equilibrio del sistema. En nuestro caso los puntos,  $P_1 = (0, 4)$  y  $P_2 = (\alpha, \alpha)$  siendo  $\alpha > 0$  la solución positiva de la ecuación  $-\frac{1}{6}(x+1)(x-4) = x$ . Es decir,  $\alpha = 1$ .

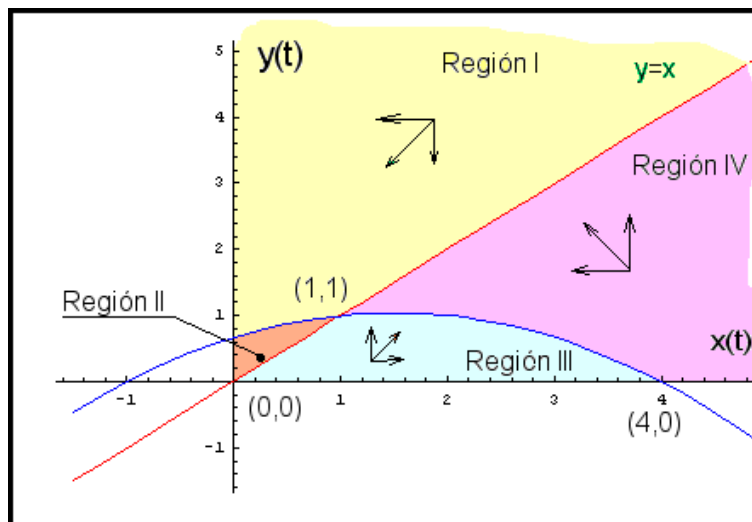


Figura 1.- Evolución de ambas poblaciones

Como muestra la Figura 1 las isoclinas nulas dividen al plano  $x \geq 0, y \geq 0$  en cuatro regiones.

El estudio del signo de las derivadas,

$$\begin{cases} x' = x \frac{1}{x+1} \left( \frac{2(x+1)}{3} \left( 1 - \frac{x}{4} \right) - y \right) = \frac{x}{x+1} \left( -\frac{1}{6}(x^2 - 3x - 4) - y \right) \\ y'(t) = ry \left( 1 - \frac{y(t)}{x(t)} \right) = \frac{ry}{x}(x - y) \end{cases}$$

nos indicará el comportamiento de ambas poblaciones. El cuadro siguiente es un resumen de la evolución de las poblaciones.

	Región I	Región II	Región III	Región IV
$x'(t)$	Negativa	Positiva	Positiva	Negativa
$y'(t)$	Negativa	Negativa	Positiva	Positiva

**Tabla 1.-** Signo de las derivadas

Si clasificamos los puntos de equilibrio podemos conocer el comportamiento local de las soluciones. Para ello será necesario encontrar el jacobiano de las funciones  $\phi(x, y), \varphi(x, y)$ , y por tanto se deben calcular todas las derivadas parciales.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{x}{1+x} \\ \frac{ry^2}{x^2} & r - \frac{2ry}{x} \end{pmatrix}$$

1. El valor del jacobiano en el punto de equilibrio  $P_1 = (4, 0)$  es,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{5} \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

Es estudio de estabilidad podemos hacerlo de dos formas:

- Calculando los valores propios de la matriz  $J_1$

$$\|J_1 - \lambda I\| = 0 \implies \lambda_1 = -2/3, \quad \lambda_2 = r$$

- Calculando la traza y el determinante de la matriz  $J_1$

$$\text{Traza}(J_1) = -\frac{2}{3} + r, \quad |J_1| = -\frac{2}{3}r$$

En ambos casos, y como consecuencia de que el parámetro  $r$  es positivo, podemos afirmar que el punto  $P_1 = (4, 0)$  es **inestable**.

2. El valor del jacobiano en el segundo punto de equilibrio  $P_2 = (1, 1)$  es,

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \\ r & -r \end{pmatrix}$$

donde

$$\text{Traza}(J_2) = \frac{1}{12} - r, \quad |J_2| = \frac{5r}{12}.$$

Al ser el parámetro  $r > 0$  hace que el valor del determinante sea siempre positivo y en consecuencia para que el punto  $P_2$  sea asintóticamente estable será necesario que la *traza*( $J_1$ ) sea negativa, lo que obliga a que  $r$  sea mayor de  $1/12$ .

### Cuenca de atracción

Recordemos que una región  $\mathcal{C}$  del plano  $(x, y)$  es una cuenca de atracción para el sistema de ecuaciones diferenciales que estamos estudiando, cuando una solución  $(x(t), y(t))$  que entre en dicha región  $\mathcal{C}$  no la abandona. Como puede apreciarse en la Figura 1, donde se ha realizado la evolución de ambas poblaciones (plano fase), el cuadrado  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x(t) < 4, 0 < y(t) < 4\}$  es una cuenca de atracción para (1).

### Soluciones periódicas

Para conocer si un sistema del tipo (1) tiene soluciones periódicas es necesario aplicar el Teorema de *Poincaré-Bendixson* cuyo enunciado es:

*Si  $\mathcal{C}$  es una cuenca de atracción del sistema  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$  que contiene a un punto de equilibrio simple que es inestable (repulsor), entonces el sistema tiene una solución periódica dentro de  $\mathcal{C}$ .*

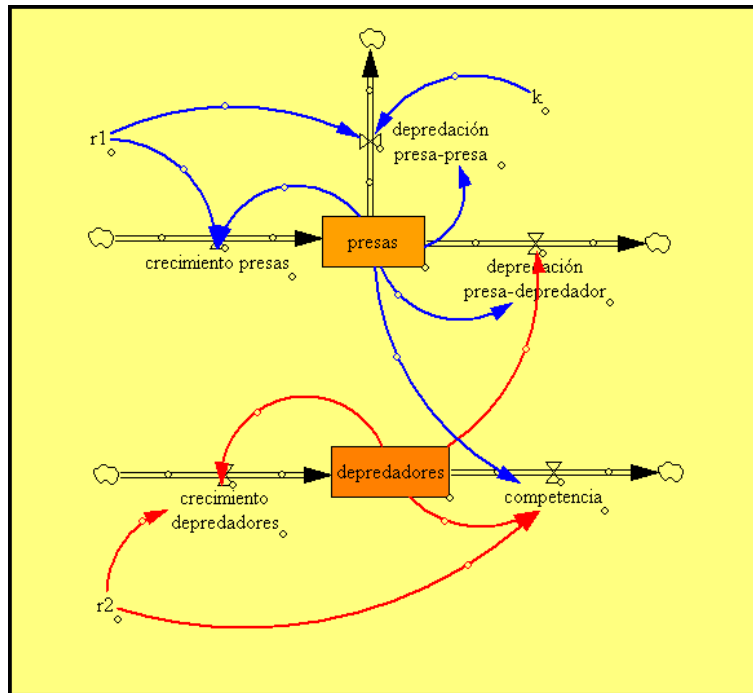
En nuestro caso, el punto  $P_2$  es inestable cuando  $r < 1/2$  y está dentro del cuadrado  $\mathcal{C}$ , por tanto el sistema presa-depredador (1) tiene una solución periódica si el parámetro  $r$  sea menor de  $1/12$ .

### Simulación con Vensim

Para construir el diagrama de Forrester es necesario detectar aquellos flujos que incrementan la tasa de crecimiento de las dos poblaciones y los flujos de salida. Para ello reescribimos el sistema inicial de ecuaciones diferenciales como,

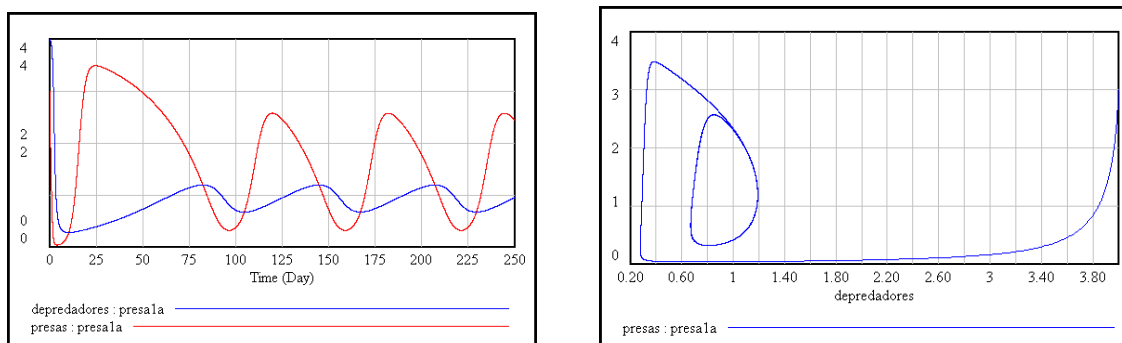
$$\begin{cases} x' = r_1x - \frac{r_1}{k}x^2 - \frac{xy}{1+x} \\ y'(t) = r_2y - r_2\frac{y^2}{x} \end{cases}$$

Podemos apreciar, en el sistema anterior y en el diagrama de *Forrester* de la Figura 2, que el primer nivel correspondiente a las presas tiene un flujo de entrada relativo al crecimiento exponencial de las presas, un nivel de salida asociado a la lucha entre las presas y otro nivel de salida donde se refleja el hecho de que una presa compite contra un depredador. El segundo de los niveles (depredadores) tiene un flujo de entrada como consecuencia del crecimiento exponencial de la población y otro flujo de salida que representa a la competencia entre las especies.



**Figura 2.-** Diagrama de Forrester

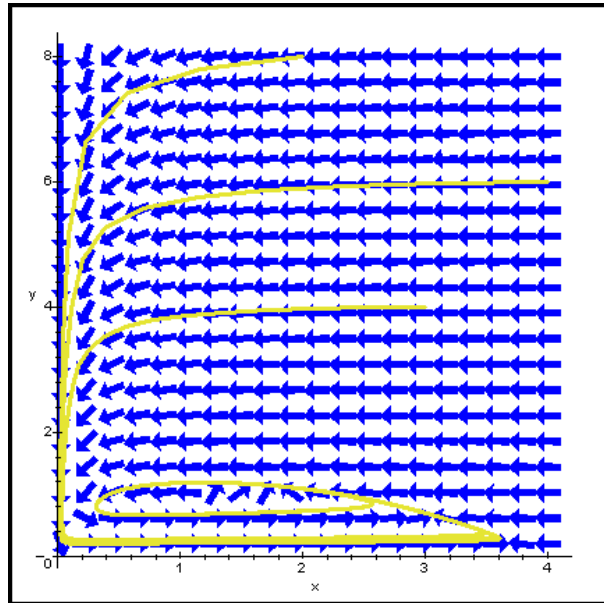
Para poner de manifiesto los resultados encontrados en los apartados anteriores hemos realizado dos simulaciones manteniendo fijo los parámetros  $r_1 = 2/3, k = 4$  y con los valores iniciales  $y(0) = 4$  y  $x(0) = 3$ .



**Figura 3.-** Resultados de la simulación con  $r_2 = 0.03$

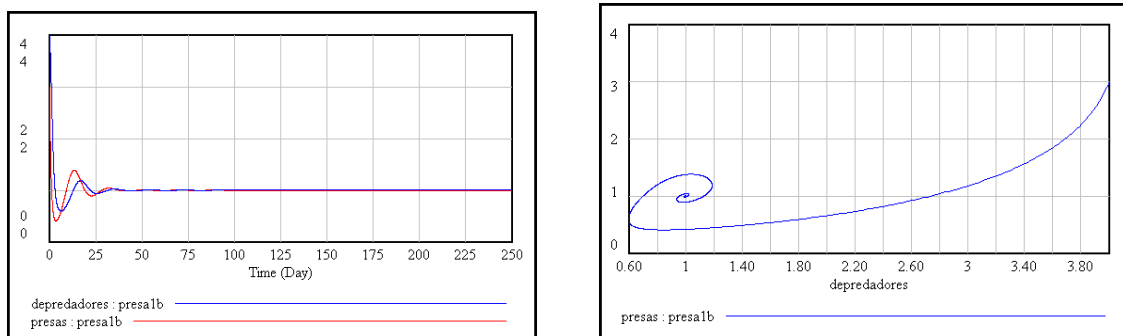
La primera simulación corresponde al caso donde  $r_2 = 0.03$  y el punto de equilibrio  $P_2 = (1, 1)$  es inestable ya que  $r_2 < 1/12$ . En las Figuras 3 y 4 se aprecia como ambas poblaciones tienen un comportamiento periódico.

El campo de direcciones, las órbitas y el plano fase pueden dibujarse con mayor precisión con *Maple*®.



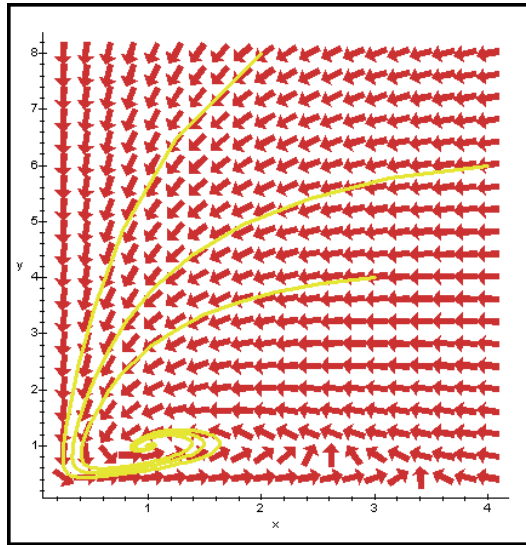
**Figura 4.-** Plano fase para  $r_2 = 0.03$

En la segunda simulación hemos considerado  $r_2 = 0.3$  donde el punto de equilibrio  $P_2 = (1, 1)$  es asintóticamente estable ya que  $r_2 > 1/12$ . En la Figura 5 podemos ver como como las dos poblaciones, a largo plazo, tienen al punto de equilibrio.



**Figura 5.-** Resultados de la simulación con  $r_2 = 0.3$

En la Figura 6 se ha dibujado el campo de direcciones, algunas órbitas y el plano fase de la segunda simulación .



**Figura 6.-** Resultados de la simulación con  $r_2 = 0.03$

Finalmente incluimos las ecuaciones del modelo introducidas con Vensim<sup>®</sup>,

---

```

presas = INTEG(crecimiento presas - depredacion presa - depredador
              -depredacion presa - presa, 3))
depredadores = INTEG(crecimiento depredadores - competencia, 4)
crecimiento presas = r1 * presas,    r1 = 2/3;
depredacion presa - presa = r1 * presas * presas/k),    k = 4
depredacion presa - depredador = presas * depredadores/(1 + presas)
crecimiento depredadores = r2 * depredadores,    r2 = 0.03
competencia = r2 * depredadores * depredadores/presas

```

---

# Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BELTRAMI E. *Mathematical Models for Society and Biology*. Academic Press, San Diego, (2002).
- [5] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [6] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [7] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [8] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [9] CHUN-LIAN ZHU; YA JIA; QUAN LIU; XUAN ZHAN *A mesoscopic stochastic mechanism of cytosolic calcium oscillations*, Biophysical Chemistry, 125, 201-212, (2007).
- [10] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [11] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download\\_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [12] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics*



*as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering*. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).

- [13] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.
- [14] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [15] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [16] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [17] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, nº 3, 395-406, (2003).
- [18] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [19] GÜNDÜZ *Ancient and Current Chaos Theories*, Interdisciplinary Description of Complex Systems, Vol. 4, nº 1, 1-18, (2006).
- [20] HAEFNER, J.W. *Modeling Biological Systems. Principles and Applications*. Chapman and Hall, New York, (1996).
- [21] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [22] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [23] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [24] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [25] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [26] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).

- [27] MAHAFFY J.M.; ZYSKIND J.W. *A model for the initiation of replication in Escherichia coli*. Journal Theory Biology, **140**, 453-477, (1989).
- [28] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [29] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [30] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [31] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).
- [32] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [33] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [34] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [35] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [36] VRIES G. DE; HILLEN T.; LEWIS M.; MÜLLER, J. SCHÖNFISH B. *A Course in Mathematical Biology. Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. SIAM (Mathematical Modeling and Computation) (2006).
- [37] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [38] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (Dipsacus sylvestris) Huds*. Ecology 58: 1103-1111, (1977).
- [39] YEARGERS E.K.; SHONKWILER R.W.; HEROLD J.V. *An Introduction to the Mathematics of Biology: with Computer Algebra models*, Birkhäuser, Berlin, (1996).