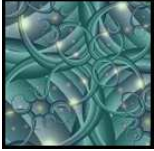


# MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

---

## Dinámica estomática <sup>1</sup>

---



La mayor parte del agua absorbida por las plantas se pierde por ellas mismas en estado de vapor por un proceso que recibe el nombre de transpiración. Este concepto es esencial para comprender la fotosíntesis de un sistema vegetal.

La transpiración viene definida como  $E = G_s * W$ ; donde  $E$  es el valor que toma la transpiración,  $G_s$  es la conductancia de la apertura estomática y  $W$  expresa la diferencia del potencial de agua entre el interior y el exterior de la hoja.

La transpiración se realiza mayoritariamente en las hojas, a través de los estomas. Los estomas son discontinuidades del tejido epidérmico que resultan de la disposición frente a frente de dos células denominadas células guarda, las cuales dejan entre ellas un hueco que se denomina ostiolo. El conjunto de las células guarda y del ostiolo es lo que denominamos estoma. El mayor o menor volumen del ostiolo y por consecuencia de las células guarda es la dinámica estomática.

El modelo, que intenta estudiar este hecho, considera que esta dinámica está regulada por las presiones relativas que ejercen las células guarda y epidérmicas como consecuencia de los cambios de turgencia que sufren debido a la captación de agua

---

<sup>1</sup>Basado en [20], página 241

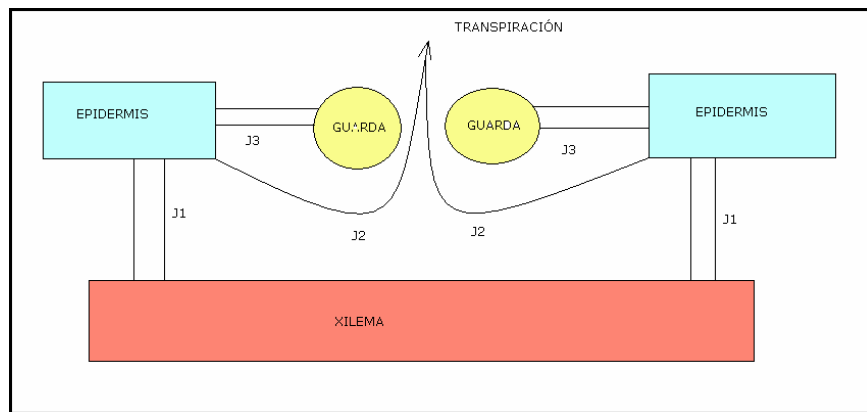
proveniente del xilema. Esta captación se produce por las diferentes concentraciones de iones que hay en las células guarda y epidérmicas en cada momento.

Los tres flujos de entrada, en el modelo, determinan el volumen de estos dos tipos de células.

- $J_1$  es el flujo de agua desde el xilema hasta las células epidérmicas. Está determinado por el potencial de agua en el xilema, por el potencial de agua en el tejido epidérmico, por la presión de turgencia en las células epidérmicas y por la presión osmótica en dichas células.
- $J_2$  representa la evaporación de agua desde las células epidérmicas. Es un valor proporcional a la diferencia entre la presión de vapor interna, en la planta, y externa en la atmósfera.
- $J_3$  valora el flujo de agua entre las células guarda y epidérmicas. Está determinado por la diferencia de potencial hídrico entre las células guarda y epidérmicas.

En este modelo se intenta representar la dinámica estomática y para ello se consideran tres variables principales:

- Volumen de las células guarda  $V_g$
- Volumen de las células epidérmicas  $V_e$
- Concentración de iones en las células guardas  $N_g$



**Figura 1.-** Esquema de la dinámica estomática

En respuesta a diferentes agentes, las células guarda toman o pierden agua con lo que aumentan o disminuyen su volumen y, respectivamente, se abre o se cierra el estoma, es decir, aumenta o disminuye el tamaño del ostiolo. Este sistema es fundamental para controlar la velocidad de transpiración de la planta.

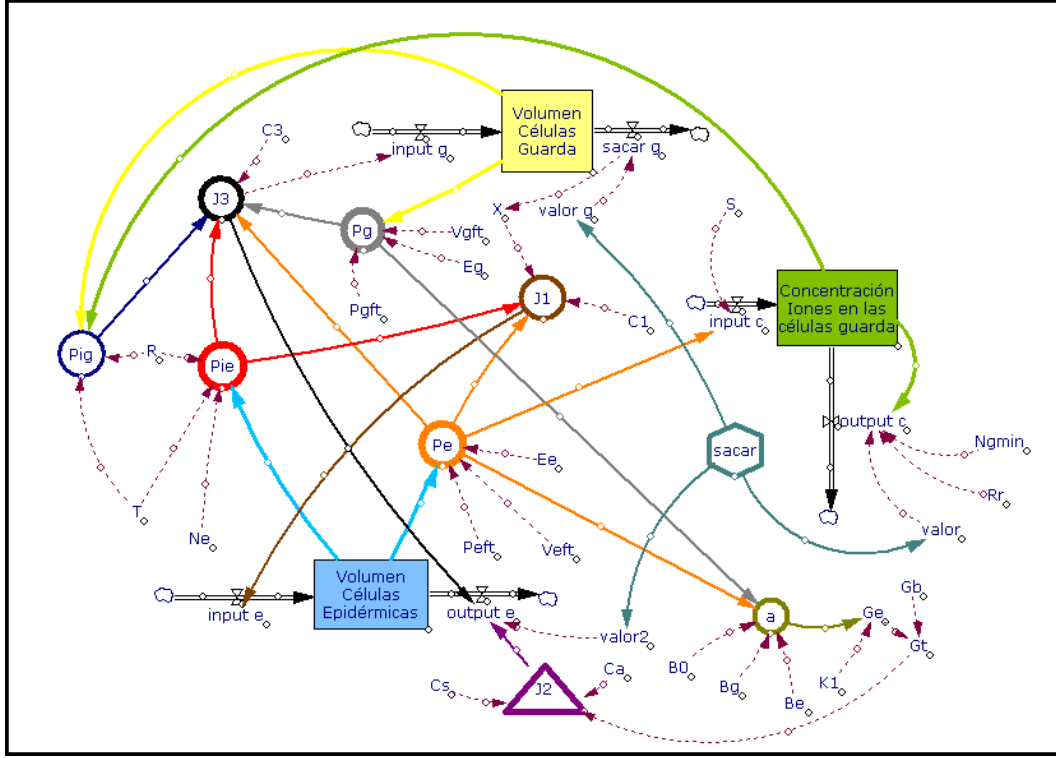


Figura 2.- Diagrama de Forrester de 1

El modelo propuesto en [20] está basado en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dV_g}{dt} = C_3 \left[ \left( - \left( \epsilon_g \left( \frac{V_g}{V_{a_g,ft}} - 1 \right) + P_{g,ft} \right) \right) + \frac{N_g RT}{V_g} \right. \\
 \quad \left. + \left( \epsilon_g \left( \frac{V_e}{V_{a_e,ft}} - 1 \right) + P_{e,ft} \right) - \frac{N_e RT}{V_e} \right] \\
 \frac{dV_e}{dt} = C_1 \left[ \Psi_x - \left( \epsilon_e \left( \frac{V_e}{V_{a_e,ft}} - 1 \right) + P_{e,ft} \right) + \frac{N_e RT}{V_e} \right] - g_t (c_s - c_a) \\
 \quad - C_3 \left[ \left( - \left( \epsilon_g \left( \frac{V_g}{V_{a_g,ft}} - 1 \right) + P_{g,ft} \right) \right) + \frac{N_g RT}{V_g} \right] \\
 \quad + \left( \epsilon_e \left( \frac{V_e}{V_{a_e,ft}} - 1 \right) + P_{e,ft} \right) - \frac{N_e RT}{V_e} \right] \\
 \frac{dN_g}{dt} = s P_e - r (N_g - N_{gmin}) .
 \end{array} \right. \quad (1)$$

A partir de estas ecuaciones construimos el Diagrama de *Forrester* que aparece en la Figura 2, cuyas ecuaciones son,

---

```

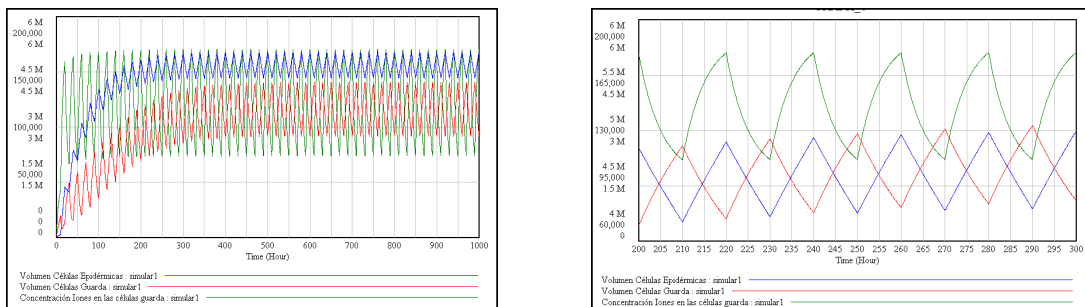
Volumen Celulas Guarda = INTEG(input g - sacar g,1000)
Volumen Celulas Epidermicas = INTEG(input e - output e,10000)
Concentracion Iones en las celulas guarda = INTEG(input c - output c,1017)
input g = J3;    sacar g = valor g;
input e = J1 + 9600;    output e = J2 + J3 + valor2;
input c = 290000 + (S * Pe);
output c = Rr * (Concentracion Iones en las celulas guarda - Ngmin) - valor;
sacar = PULSE TRAIN(10,10,20,1000)
J1 = C1 * (X - Pe + Pie);  J2 = Gt * (Cs - Ca);  J3 = C3 * (-1 * Pg + Pig + Pe - Pie)
Pg = Eg * (Volumen Celulas Guarda/Vgft - 1) + Pgft;
Pe = Ee * (Volumen Celulas Epidermicas/Veft - 1) + Peft;
Pie = Ne * R * T/Volumen Celulas Epidermicas
Pig = Concentracion Iones en las celulas guarda * R * T/Volumen Celulas Guarda
valor g = 10000 * sacar;  X = 0 + sacar g;  C3 = 1;  C3 = 1;
Vgft = 4200;  Eg = 50;  Pgft = 15;  C1 = 15
R = 0.08319;  T = 298;  Ne = 678.4;
Ee = 50;  Veft = 42000;  Peft = 10;
a = B0 + Bg * Pg - Be * Pe;  Ge = a * K1;  Be = 1;  Bg = 1;  B0 = 0;
K1 = 0.1;  Gt = Gb * Ge/Gb + Ge;  Gb = 3;  Ca = 20;  Cs = 30;  S = 10

```

---

De todas ecuaciones merece prestar especial atención a la variable **sacar**, por la forma en que está definida y por su significado dentro del sistema.

Los resultados numéricos de la simulación aparecen en la Figura 3. En un principio todas las variables se incrementan hasta un momento en el que el sistema presenta un comportamiento oscilatorio en cada una de las variables (Figura 3 derecha). Este hecho es bien conocido y ha sido comprobado experimentalmente.



**Figura 3.-** Izquierda: Simulación en el intervalo [0, 1000]. Derecha: resultados en [200, 300]

# Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BELTRAMI E. *Mathematical Models for Society and Biology*. Academic Press, San Diego, (2002).
- [5] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [6] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [7] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [8] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [9] CHUN-LIAN ZHU; YA JIA; QUAN LIU; XUAN ZHAN *A mesoscopic stochastic mechanism of cytosolic calcium oscillations*, Biophysical Chemistry, 125, 201-212, (2007).
- [10] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [11] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download\\_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [12] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics*

*as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering*. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).

- [13] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.
- [14] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [15] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [16] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [17] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, nº 3, 395-406, (2003).
- [18] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [19] GÜNDÜZ *Ancient and Current Chaos Theories*, Interdisciplinary Description of Complex Systems, Vol. 4, nº 1, 1-18, (2006).
- [20] HAEFNER, J.W. *Modeling Biological Systems. Principles and Applications*. Chapman and Hall, New York, (1996).
- [21] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [22] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [23] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [24] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [25] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [26] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).

- [27] MAHAFFY J.M.; ZYSKIND J.W. *A model for the initiation of replication in Escherichia coli*. Journal Theory Biology, **140**, 453-477, (1989).
- [28] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [29] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [30] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [31] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).
- [32] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [33] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [34] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [35] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [36] VRIES G. DE; HILLEN T.; LEWIS M.; MÜLLER, J. SCHÖNFISH B. *A Course in Mathematical Biology. Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. SIAM (Mathematical Modeling and Computation) (2006).
- [37] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [38] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (Dipsacus sylvestris) Huds*. Ecology 58: 1103-1111, (1977).
- [39] YEARGERS E.K.; SHONKWILER R.W.; HEROLD J.V. *An Introduction to the Mathematics of Biology: with Computer Algebra models*, Birkhäuser, Berlin, (1996).