

MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES

Modelos de captura de peces



Representaremos por $y(t)$ a la población de peces en el instante t , con el tiempo en años. Sabemos que su derivada $y'(t) = dy(t)/dt$ representa a la tasa de variación neta de la población, que consideraremos expresada en toneladas de pescado por año. El objetivo de esta sección es analizar el modelo propuesto en [4] haciendo uso de una metodología diferente como es la Dinámica de Sistemas.

Modelo con sobrepoblación y captura. En este caso, y en cada momento, la tasa de variación de la población de peces dependerá de los nacimientos, de las muertes y de los peces capturados. Es decir,

$$y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \text{tasa de nacimiento} - \text{tasa de muerte} - \text{tasa de captura} . \quad (1)$$

También podíamos haber introducido en la expresión anterior las tasas de emigración e inmigración pero al no modificar básicamente al modelo, supondremos que se anulan mutuamente. Después de un trabajo de campo se ha podido determinar que la cantidad de peces que nacen y mueren es proporcional al tamaño de la población. En este caso, $ay(t)$ con $a > 0$ representará a la tasa de nacimiento en un instante cualquiera t , mientras que $(b+cy(t))y(t)$ con $b > 0$, $c > 0$, será la tasa de mortalidad en el momento t . Observemos que a la tasa de mortalidad se ha añadido al término $by(t)$ el $cy^2(t)$ que representa al efecto de **sobrepoblación**. Ahora la ecuación (1)

adopta la forma,

$$y'(t) = a y(t) - (b + cy(t))y(t), \quad a > 0, b > 0, c > 0, \quad (2)$$

Si H representa a la tasa de captura, medida en toneladas/año, podemos introducir este efecto en la expresión (2) y se transformará en,

$$y'(t) = a y(t) - (b + cy(t))y(t) - H, \quad a > 0, b > 0, c > 0, H > 0, \quad (3)$$

Supongamos el siguiente modelo para una población de peces de un lago con sobrepoblación,

$$y'(t) = y(t) - 1/12y^2(t)$$

y con una tasa de pesca moderada $H = 5/3$. Simularemos el modelo para diferentes valores iniciales y analizaremos los resultados.

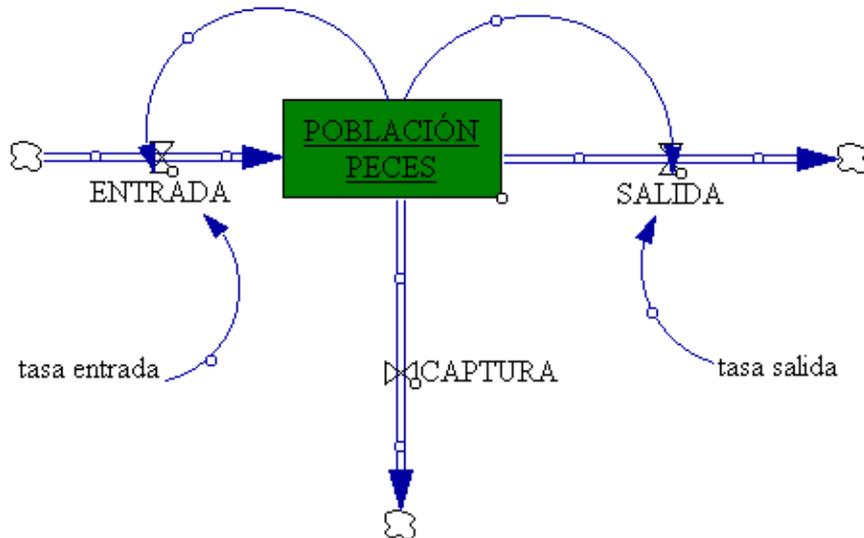


Figura 1.19 Diagrama causal de $y' = y - \frac{1}{12}y^2(t) - \frac{5}{3}$.

En la Figura 1.20 (izquierda) aparece el resultado de la simulación donde se detectan dos puntos de equilibrio $y(t) = 2$, $y(t) = 10$, siendo el primero una fuente y el segundo un sumidero, es decir, un punto de equilibrio estable. Además, se observa que si el valor inicial $y(0)$ se encuentra por debajo de 2 toneladas, entonces la población desaparece rápidamente. En concreto si $y(0) = 1$ toneladas, poco después de los cuatro años los peces del lago habrán desaparecidos. En resumen, el modelo nos indica que una captura moderada de peces no parece muy dañina siempre y cuando el número inicial de peces sea lo suficientemente alto. Sin embargo, esta tasa de captura moderada podría causar la extinción de los peces si el nivel de población inicial es bajo.

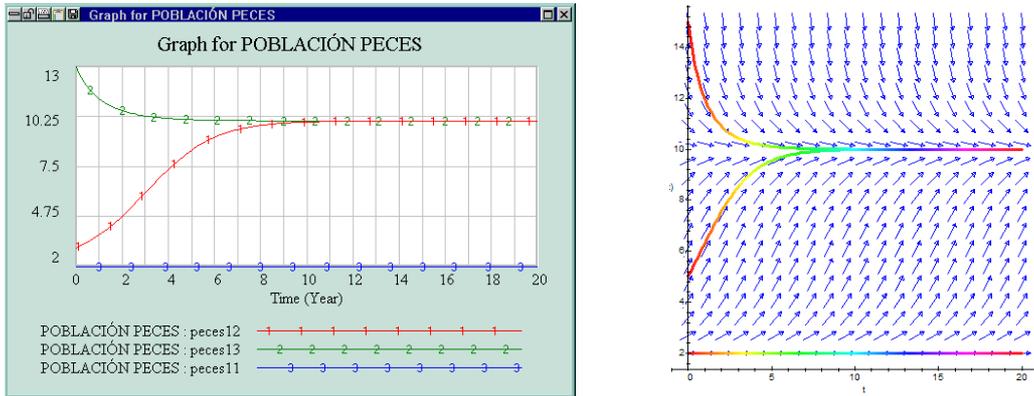


Figura 1.20. Resultado simulación y campo de direcciones.

Podemos modificar ligeramente el modelo en el sentido de que no existiera restricciones para los pescadores y por lo tanto la tasa de captura fuese más alta, por ejemplo:

$$y'(t) = y(t) - \frac{1}{12}y^2(t) - 4, \quad y(0) = y_0.$$

Ahora, sea cual sea el número inicial de peces, la población siempre se extinguirá.

Modelo con sobrepoblación, captura y prohibición. Es evidente que esta última tasa de captura no puede ser permitida, por este motivo, es frecuente que se prohíba la pesca durante un determinado periodo de tiempo. Para tener en cuenta esta circunstancia la tasa de captura suele ser una cierta función de salto.

Supongamos que después de cinco años de pesca a una tasa de 4 toneladas por año se prohíbe la pesca durante otros cinco años. La tasa de captura estará representada por la función,

$$H(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 0 & \text{si } 5 \leq t < 10 \end{cases}$$

y el problema de valores iniciales que representa al modelo será,

$$y'(t) = y(t) - \frac{1}{12}y^2(t) - H(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq 10. \quad (4)$$

El problema (4) tiene una única solución $y(t)$ para todo valor de y_0 aunque su expresión implícita es molesta de encontrar. Por este motivo, tenemos que recurrir a encontrar una solución aproximada haciendo uso de técnicas numéricas o utilizar algún software de simulación.

En la Figura 1.21 aparece el diagrama causal del modelo (4). Como puede apreciarse la única variación respecto al primer modelo estudiado corresponde al flujo de salida de la captura, siendo su editor de ecuaciones la Figura 1.22.

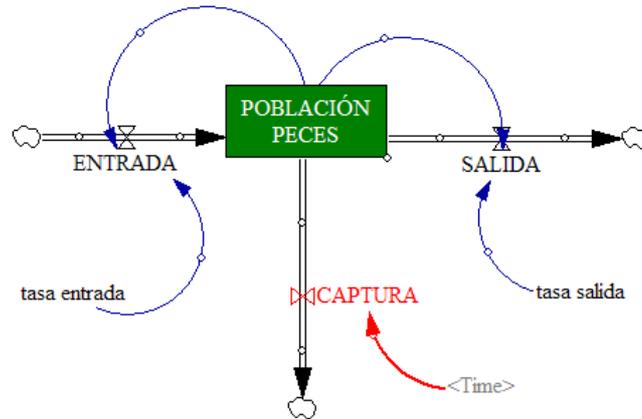


Figura 1.21. Diagrama causal de $y' = y - \frac{1}{12}y^2 - H(t)$.

Después de la simulación, la gráfica correspondiente a la población de peces para distintos valores iniciales puede verse en la Figura 1.23. Los peces no desaparecen siempre y cuando la población inicial y_0 sea suficientemente grande, tendiendo la población a la cantidad constante de 12 toneladas.

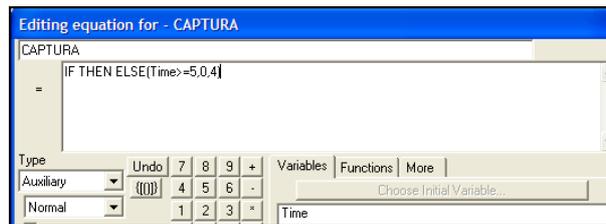


Figura 1.22. Editor de ecuaciones del flujo CAPTURA.

Observemos como la curva solución $y(t)$ tiene un punto anguloso en $t = 5$, y por lo tanto a pesar de ser una función continua no es derivable. Este hecho está relacionado, como sabemos, con el concepto de derivada. La tasa de captura $H(t)$ no es continua en el punto $t = 5$.

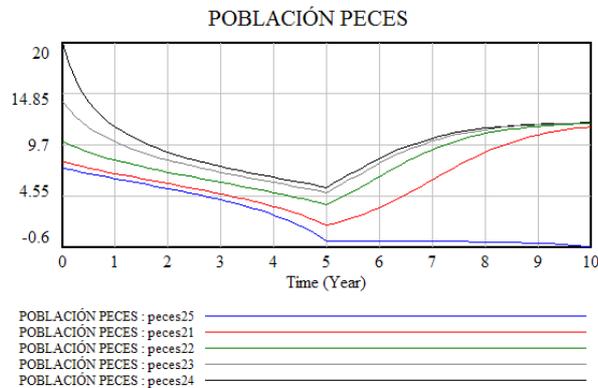


Figura 1.23. Resultado simulación.

Captura y reabastecimiento periódicos. El reabastecimiento de la población de peces con R toneladas anuales da lugar al problema de valor inicial,

$$y'(t) = m y(t) - n y^2(t) + R, \quad m > 0, n > 0, R > 0, \quad y(0) = y_0.$$

La incorporación de peces puede ser constante (como en el modelo anterior), o bien una función periódica, tal y como se indica en el siguiente ejemplo.

Consideremos el problema de valor inicial

$$y'(t) = y(t) - y^2(t) + 0,3 \text{sen}(2\pi t), \quad y(0) = y_0. \quad (5)$$

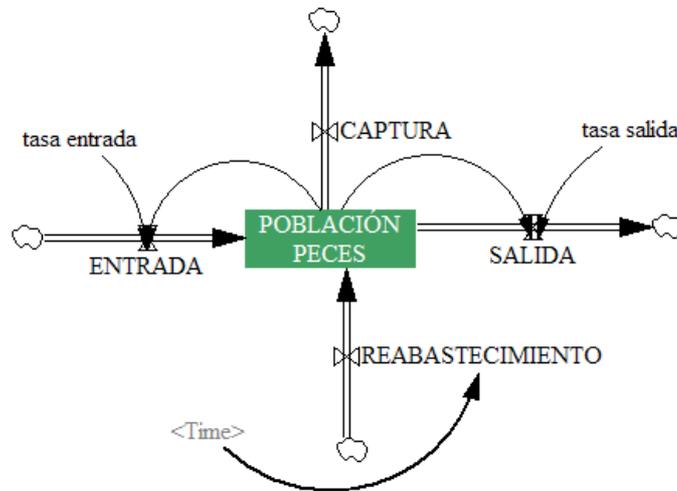


Figura 1.24. Diagrama causal de $y' = y - y^2 + 0,3 \text{sen}(2\pi t)$.

donde el aspecto más interesante corresponde al flujo de reabastecimiento,

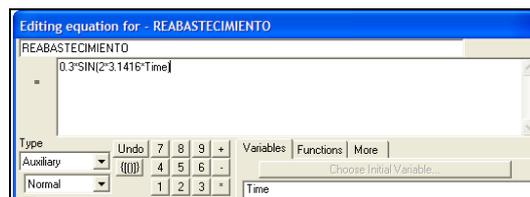


Figura 1.25. Editor de ecuaciones el flujo REABASTECIMIENTO.

Al simular el modelo observamos que, a largo plazo, la población de peces tiende hacia una función periódica. Es decir, los peces no desaparecen y su número oscilarán entre los valores 0.95 toneladas y 1.05 toneladas.

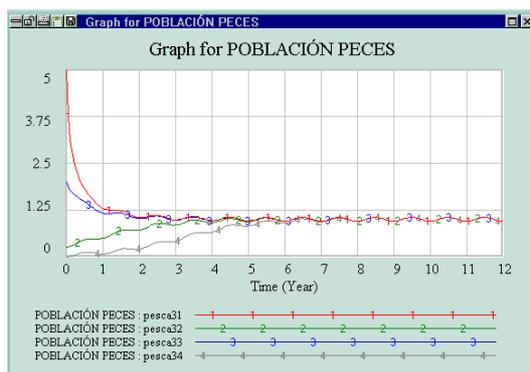


Figura 1.26. Resultado simulación para cuatro valores iniciales.

Finalmente, modificaremos el problema (4) introduciendo los términos correspondientes a la captura y reabastecimiento periódicos.

$$y'(t) = y(t) - y^2(t) + 0,3 \text{ sen}(2\pi t) - 0,25, \quad y(0) = y_0.$$

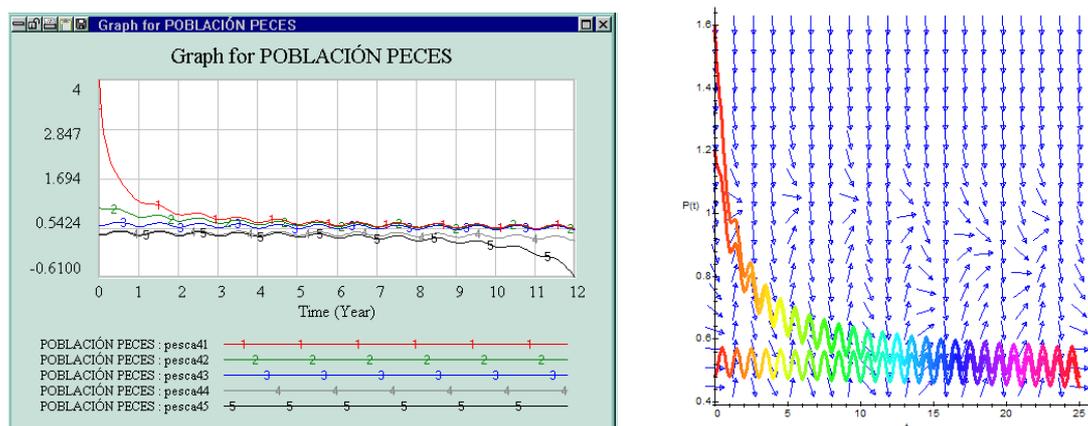


Figura 1.27 Resultado simulación y campo de direcciones.

Captura intensa, captura moderada. Hemos visto en modelos anteriores que cuando el número inicial de peces es bajo no puede mantenerse por mucho tiempo una tasa de captura alta y fija porque se exterminaría la población ¿Qué sucederá cuando tras un periodo de captura intensa sigue otro de captura moderada? Supongamos el problema de valor inicial,

$$y'(t) = y(t) - \frac{1}{12}y^2(t) - H(t), \quad y(0) = y_0, \quad (6)$$

donde

$$H(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 5/3 & \text{si } 5 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

Para trazar las curvas solución con distintos valores de y_0 , construimos un diagrama causal idéntico al de la Figura 1.21, teniendo en cuenta de modificar, en el editor de

ecuaciones, el flujo de captura. El resultado de las distintas simulaciones aparece en la Figura 1.28.

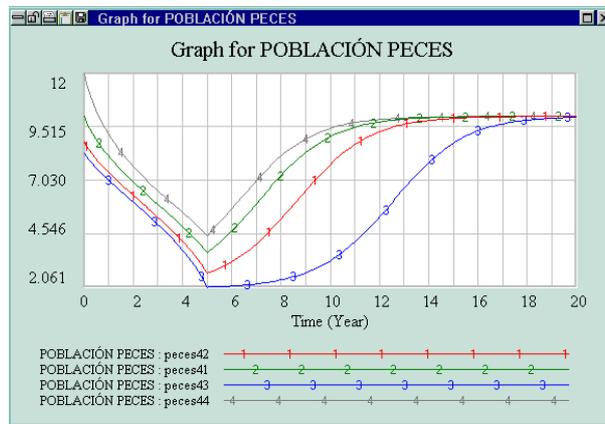


Figura 1.28. Resultado simulación con diferentes valores iniciales.

Como puede apreciarse, el resultado obtenido es muy parecido al obtenido en la Figura 1.23, y en consecuencia siguen siendo cierto los comentarios que realizamos en su momento.

Captura estacional. En ocasiones el tipo de captura que se realiza es del tipo estacional, es decir, se extraen peces durante los primeros meses del año, prohibiéndose la pesca en el resto de los meses. La ecuación diferencial que modeliza a la situación planteada es $y'(t) = my(t) - ny^2(t) - H(t)$, donde $H(t)$ tiene el valor H_0 durante la estación de captura y 0 en la estación inactiva. .

Supongamos que $m = 1$, $n = 1/12$, $H_0 = 4$, y además que la captura se realiza durante los ocho primeros meses del año.

La única diferencia con respecto al primer ejemplo es que ahora la función de captura será $H(t) = 4oc(t, 8/12, 1)$, es decir, una onda cuadrada de valor 4 en los ocho primeros meses y 0 en el resto, con amplitud de 1 año.

El editor de ecuaciones para el flujo captura se ha representado en la Figura 1.29.

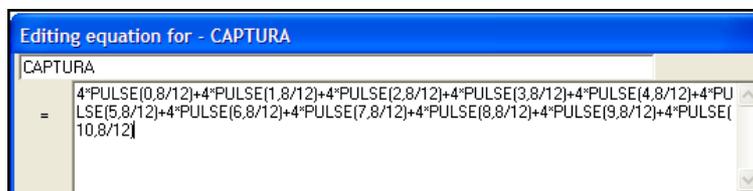


Figura 1.29. Editor de ecuaciones.

A continuación procedemos a ejecutar el programa para diferentes valores iniciales de la población de peces y_0 . En la Figura 1.30 podemos ver el resultado de las diferentes simulaciones, correspondientes al nivel de peces.

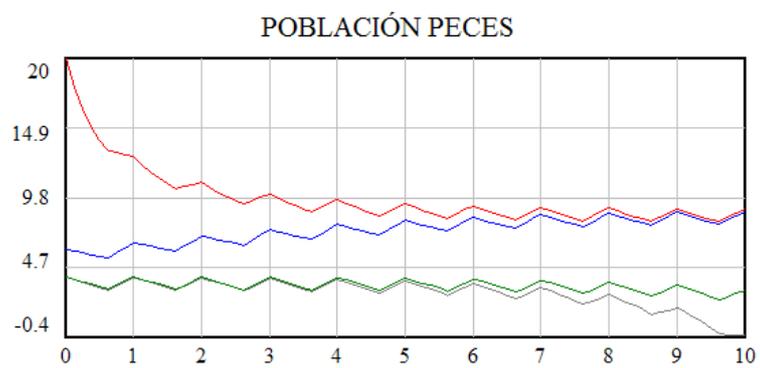


Figura 1.30. Resultado simulación.

Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [5] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [6] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [7] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [8] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [9] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [10] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering*. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).
- [11] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.

- [12] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [13] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [14] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [15] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, n^o 3, 395-406, (2003).
- [16] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [17] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [18] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [19] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [20] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [21] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [22] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).
- [23] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [24] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [25] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [26] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).

- [27] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [28] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [29] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [30] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [31] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [32] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (*Dipsacus sylvestris*) Huds.* Ecology 58: 1103-1111, (1977).