

MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES

Acumulación de un contaminante



Como acabamos de comprobar, por medio de las ecuaciones diferenciales, podemos representar una gran cantidad de procesos y situaciones de la vida cotidiana. Recordemos que el planteamiento básico de la ecuación diferencial consiste en lo siguiente: si $y(t)$ representa la cantidad de sustancia contaminante o el tamaño de una población, entonces la tasa de cambio $y'(t)$ puede calcularse, por la ley de equilibrio, como un flujo de entrada menos un flujo de salida.

Modelo para la acumulación de un contaminante. Supongamos un depósito que contiene 100 litros de agua contaminada en el que hay disueltos 15 kilos de una sustancia contaminante. El agua contaminada sale del depósito a un ritmo de 10 litros por minuto. La concentración del contaminante en la corriente de entrada es de 0.2 kilos por cada litro. La solución del depósito se mezcla de manera uniforme y el agua fluye a una tasa de 10 litros por minuto.

Sea $y(t)$ la cantidad de contaminante que hay en el depósito en el instante t . Aplicamos la ley de equilibrio para encontrar la ecuación diferencial que modela esta situación. El contaminante entra en el depósito a un ritmo de

$$\left(10 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}}\right) \cdot \left(0,2 \frac{\text{kilos}}{\text{litro}}\right) = 2 \frac{\text{kilos}}{\text{minuto}}$$

Al mismo tiempo, el contaminante sale del depósito a una tasa de

$$\left(10 \frac{\text{litros}}{\text{minuto}}\right) \cdot \left(\frac{y(t)}{100} \cdot \frac{\text{kilos}}{\text{litros}}\right) = 0,1y(t) \frac{\text{kilos}}{\text{minuto}}$$

El problema de valor inicial será

$$y'(t) = 2 - 0,1y(t), \quad y(0) = 15,$$

cuya solución es $y(t) = 20 - 5e^{-0,1t}$. Su diagrama causal está representado en la Figura 1.14.

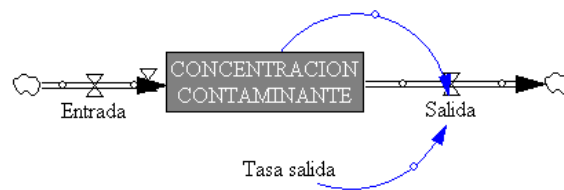


Figura 1.14. Diagrama causal de $y' = 2 - 0,1y$.

En la Figura 1.15 puede verse la cantidad de contaminante que hay en el depósito para tres tasas diferentes de salida, 0,10 , 0,125 y 0,20.

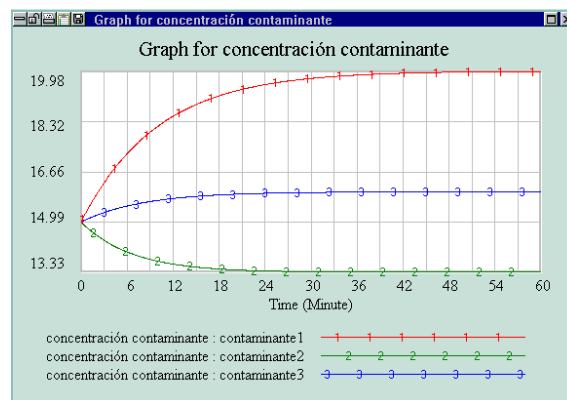


Figura 1.15. Resultado simulación.

A continuación modifiquemos el ejemplo anterior suponiendo que, en lugar de ser 0.2 kilos por litro la concentración del contaminante en la corriente de entrada, ésta sea $c(t)$ que varía de forma sinusoidal según la expresión,

$$c(t) = 0,2 + 0,1 \text{ sen } t.$$

En este caso el problema de valor inicial que tenemos que simular es,

$$y'(t) = (2 + \text{sen } t) - 0,1y(t), \quad y(0) = 15,$$

cuya solución viene dada por la expresión,

$$y(t) = -0,0099e^{-0,1t} (405 - 2020e^{0,1t} + 100e^{0,1t} \cos t - 10e^{0,1t} \sin t)$$

Observemos como el diagrama causal sigue siendo el mismo, con la única modificación de la introducción de la variable **Time**, que debe conectarse al flujo de entrada. La Figura 1.16 ilustra el resultado de la simulación para concentraciones iniciales $y(0) = 15$, $y(0) = 0$. En ambos caso, parece ser que la respuesta a largo plazo es también oscilatoria con la misma frecuencia que la entrada.

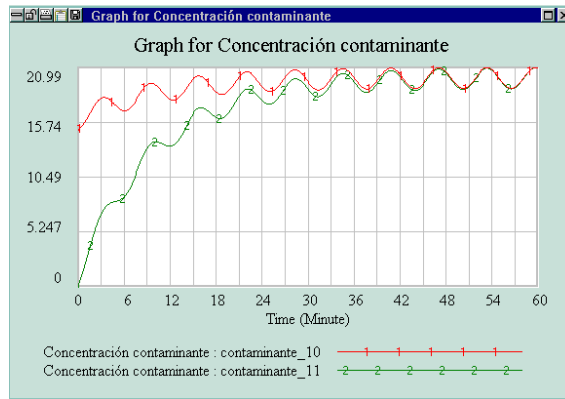


Figura 1.16. Resultado simulación $y'(t) = (2 + \sin t) - 0,1y(t)$.

Limpieza del suministro de agua. La introducción de las funciones escalonadas en los modelos tiene como objetivo el de activar o desactivar las entradas de los parámetros. La función escalonada básica se define,

$$\text{paso}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

En relación al modelo que estamos considerando, supongamos que la concentración de contaminante en el flujo de entrada $c(t)$ es de 0.2 kilos por litro, pero que 20 minutos después se filtraron los contaminantes del flujo de entrada. Entonces

$$c(t) = 0,2 \text{paso}(20 - t) = \begin{cases} 0,2 & \text{si } t \leq 20 \\ 0 & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

Ahora el editor de ecuaciones para el flujo de entrada tiene el aspecto que presenta la Figura 1.17.

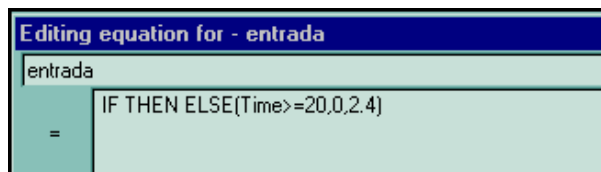


Figura 1.17. Editor de ecuaciones del flujo de entrada.

En la Figura 1.18 se observa la variación en la concentración de contaminante en el depósito para dos valores iniciales. Los puntos angulosos de las dos curvas solución se deben a la discontinuidad en el minuto 20 de la función escalonada que hemos empleado para modelar el flujo de entrada.

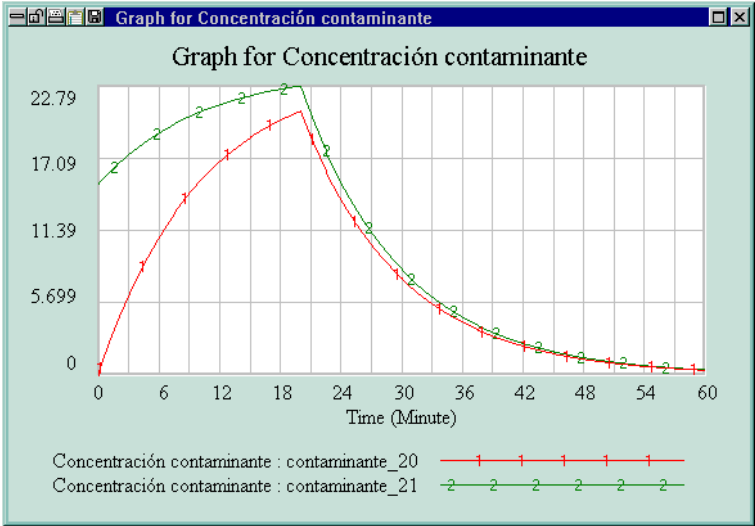


Figura 1.18. Resultado simulación con $y_0 = 0$, $y_0 = 15$.

Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [5] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [6] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [7] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [8] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [9] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [10] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering*. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).
- [11] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.

- [12] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [13] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [14] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [15] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, n^o 3, 395-406, (2003).
- [16] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [17] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [18] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [19] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [20] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [21] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [22] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).
- [23] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [24] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [25] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [26] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).

- [27] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [28] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [29] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [30] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [31] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [32] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (*Dipsacus sylvestris*) Huds.* Ecology 58: 1103-1111, (1977).