

MODELOS MATEMÁTICOS EN BIOLOGÍA ANIMAL, BIOLOGÍA VEGETAL Y ECOLOGÍA

Crecimiento vegetal estructurado¹



En casos anteriores hemos tenido la ocasión de trabajar con diferentes modelos matriciales, como son las cadenas de Markov y el modelo de Leslie. Naturalmente, existen muchos más modelos que se originan al modificar las hipótesis de partida, tal y como mostraremos en esta sección. Por ejemplo, si variamos ligeramente el modelo de Leslie en el sentido de permitir que algunos de los individuos puedan permanecer en la misma clase después de un período de tiempo, entonces la diagonal principal de la matriz de proyección, A , que representa al modelo matricial, $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)$, puede tener algún elemento no nulo. A este nuevo modelo se le conoce con el nombre de modelo de Usher.

De esta manera, si suponemos un modelo de Leslie con tres clases de edades de 10 años de duración, podemos suponer que el tiempo de paso, de un período al siguiente sea de 5 años en lugar de 10 años. Ahora está justificado que la matriz de proyección que representa a este modelo de Usher tenga algún elemento de la diagonal principal no nulo, ya que es posible que algunas de las hembras que en un momento determinado, t , está en una de las clases, en el período siguiente, $t+1$, puede seguir estando en la misma clase.

Con argumentos parecidos podemos obtener modelos matriciales diferentes, como

¹Basado en [32]

suele suceder para el caso del *Dypsacus sylvestris* (Teasel) que mostramos a continuación.

.	semilla	semilla 1	semilla 2	roseta peq.	roseta med.	roseta gra.	flor
semilla	0	0	0	0	0	0	635
semilla 1	0.634	0	0	0	0	0	0
semilla 2	0	0.974	0	0	0	0	635
ros. peq.	0.013	0.017	0.011	0	0	0	635
ros. med.	0.109	0.001	0.002	0.077	0.212	0	0
ros. gra.	0.006	0.003	0	0.038	0.281	0	0
flor	0	0	0	0	0.063	1	0

Tabla 3.4

El cardo silvestre es una planta invasora bianual de aproximadamente 2 metros, la cual desarrolla espinas en el extremo de la flor, y se suele encontrar en zonas húmedas de Europa. La planta adulta suele tener flores secas. La Tabla 3.4 muestra la probabilidad de cambio al siguiente estadio de desarrollo de esta especie en campo abierto.

Existen siete estados que están relacionados como muestra la Figura 3.27

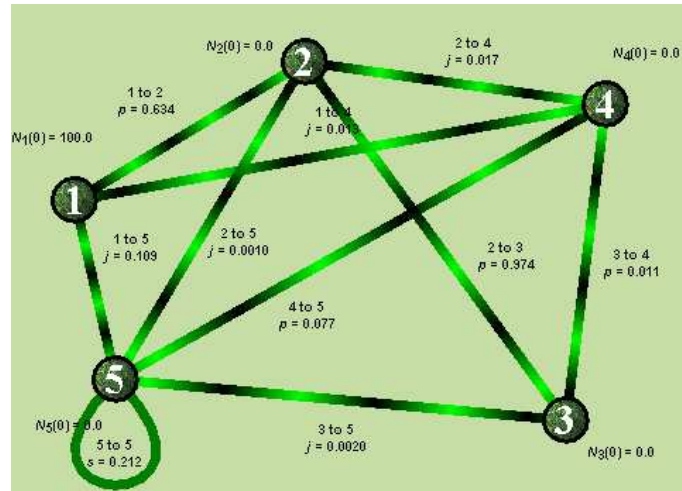


Figura 3.27. Diagrama de estados.

El modelo matricial que representa a esta situación es, $\vec{X}(t+1) = A\vec{X}(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, o bien,

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \\ x_6(t+1) \\ x_7(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 635 \\ 0,634 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,974 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,013 & 0,017 & 0,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,109 & 0,001 & 0,002 & 0,077 & 0,212 & 0 & 0 \\ 0,006 & 0,003 & 0 & 0,038 & 0,281 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,063 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{pmatrix}$$

Si partimos de una población inicial de 100 semillas, ¿cuál será la evolución de la población?. Para ello, tenemos dos caminos a seguir. El primero consiste calcular con Mathematica las sucesivas generaciones $\vec{X}(k) = A^k \vec{X}(0)$, siendo $\vec{X}(0) = (100, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.

La segunda opción consiste en probar que la matriz A tiene un valor propio estrictamente dominante. Los autovalores de la matriz son: $\lambda_1 = 2,59476$, $\lambda_2 = -0,393793 + 2,17677i$, $\lambda_3 = -0,393793 - 2,17677i$, $\lambda_4 = -1,58924$, $\lambda_5 = 0,0431524 + 0,172076i$, $\lambda_6 = 0,0431524 - 0,172076i$, $\lambda_7 = -0,0922397$. Al ser los módulos de los números complejos $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$, menores que ,59476, entonces éste será el valor propio estrictamente dominante.

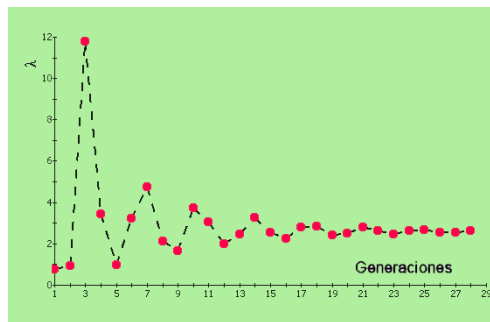


Figura 3.28. Evolución del valor propio estrictamente dominante.

En consecuencia, a largo plazo, la población crecerá a un ritmo de un 159 % cada año. Por otro lado, como el vector

$$(0,713782 \ 0,174404 \ 0,0654665 \ 0,00499629 \ 0,0329418 \ 0,00549276 \ 0,00291668)$$

es el autovector asociado al λ_1 cuya suma de sus componentes vale la unidad, podemos concluir, que a largo plazo, el 71 % serán semillas, el 17 % semilla 1, el 6.5 % semilla 2, el 0.5 % roseta pequeña, el 3 % roseta mediana, el 0.5 % roseta grande y el 0.3 % serán flores.

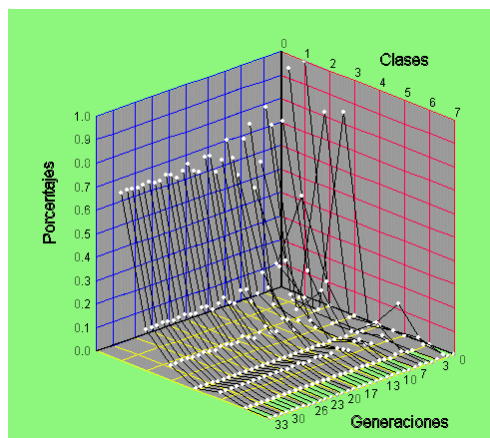


Figura 3.29. Evolución de cada una de las clases.

La Tabla 3.5 corresponden a las probabilidades de cambio de un estadio a otro del cardo silvestre en matorral.

.	semilla	semilla 1	semilla 2	roseta peq.	roseta med.	roseta gra.	flor
semilla	0	0	0	0	0	0	635
semilla 1	0.634	0	0	0	0	0	0
semilla 2	0	0.974	0	0	0	0	635
ros. peq.	0.013	0.017	0.011	0	0	0	635
ros. med.	0.109	0.001	0.002	0.077	0.212	0	0
ros. gra.	0.006	0.003	0	0.038	0.281	0	0
flor	0	0	0	0	0.063	1	0

Tabla 3.5

Ahora la matriz A que representa al modelo es,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 476 \\ 0,423 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,987 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,024 & 0,009 & 0,006 & 0,007 & 0 & 0 & 0 \\ 0,044 & 0 & 0 & 0,050 & 0,158 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0,008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,250 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene al $\lambda_1 = 0,6141$ como valor propio estrictamente dominante. En consecuencia, a largo plazo, la población disminuirá año tras año en un 39% y por tanto en el matorral la población de cardo silvestre desaparecerá.

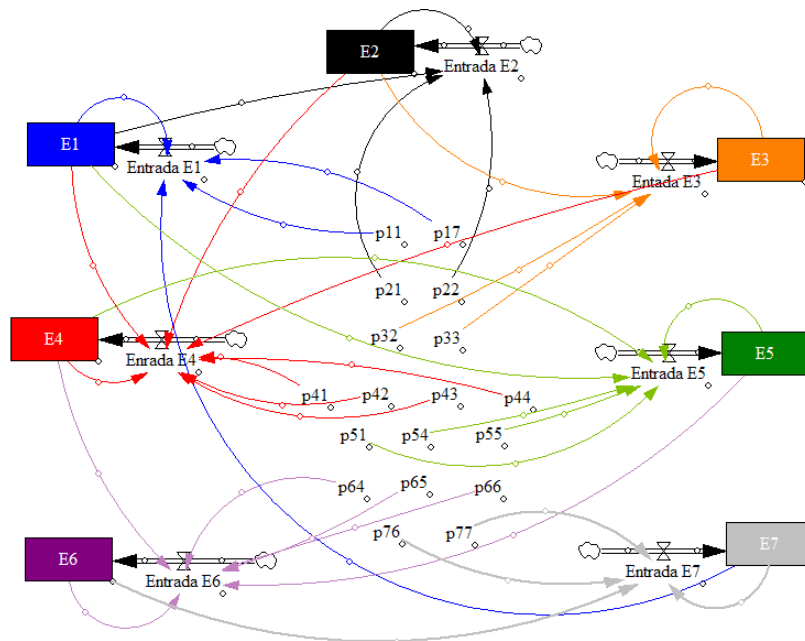


Figura 3.30. Diagrama causal del modelo.

A este mismo resultado podemos llegar si utilizamos Dinámica de Sistemas para el análisis del modelo. En primer lugar escribimos de forma conveniente las ecuaciones del modelo,

$$\begin{cases} x_1(t + \Delta t) - x_1(t) = -x_1(t) + 476x_7(t) \\ x_2(t + \Delta t) - x_2(t) = 0,423x_1(t) - x_2(t) \\ x_3(t + \Delta t) - x_3(t) = 0,97x_2(t) - x_3(t) \\ x_4(t + \Delta t) - x_4(t) = 0,024x_1(t) + 0009x_2(t) + 0,006x_3(t) - 0993x_4(t) \\ x_5(t + \Delta t) - x_5(t) = 0,044x_1(t) + 0,05x_4(t) - 0,842x_5(t) \\ x_6(t + \Delta t) - x_6(t) = 0,002x_4(t) + 0,08x_5(t) - x_6(t) \\ x_7(t + \Delta t) - x_7(t) = 0,250x_6(t) - x_7(t) \end{cases}$$

los que nos permite construir el diagrama causal (Figura 3.30) de una manera inmediata. Introducidas las ecuaciones,

```

E1 = INTEG(EntradaE1, 100)  E2 = INTEG(EntradaE2, 0)
E3 = INTEG(EntradaE3, 0)    E4 = INTEG(EntradaE4, 0)
E5 = INTEG(EntradaE5, 0)    E6 = INTEG(EntradaE6, 0)
E7 = INTEG(EntradaE7, 0)

EntradaE1 = p11 * E1 + p17 * E7;  EntradaE4 = p41 * E1 + p42 * E2 + p43 * E3 + p44 * E4
EntradaE3 = p32 * E2 + p33 * E3;  EntradaE2 = p21 * E1 + p22 * E2
EntradaE5 = p51 * E1 + p54 * E4 + p55 * E5;  EntradaE6 = p64 * E4 + p65 * E5 + p66 * E6
EntradaE7 = p76 * E6 + p77 * E7

p11 = -1  p17 = 76  p21 = 0,423  p22 = -1  p32 = 0,987  p33 = -1  p41 = 0,024
p42 = 0,009  p43 = 0,006  p51 = 0,044  p54 = 0,05  p55 = -0,842  p64 = 0,002
p65 = 0,08  p66 = -1  p76 = 0,25  p77 = -1

```

y simulado el modelo, se comprueba como, en efecto, la población de cardo silvestre en un matorral desaparece.

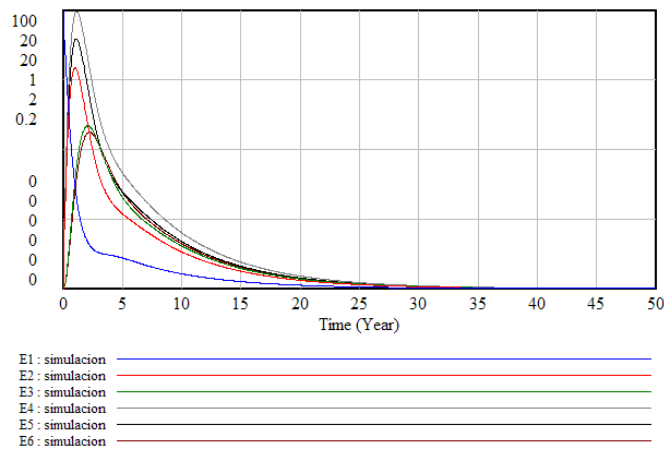


Figura 3.31. Evolución de cada una de las clases.

Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [5] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [6] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [7] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [8] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [9] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [10] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering*. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).
- [11] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.

- [12] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [13] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [14] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [15] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, n^o 3, 395-406, (2003).
- [16] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [17] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [18] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [19] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [20] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [21] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [22] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).
- [23] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [24] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [25] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [26] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).

- [27] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [28] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [29] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [30] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [31] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [32] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (*Dipsacus sylvestris*) Huds.* Ecology 58: 1103-1111, (1977).