

MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Teoría de catástrofes: Dinámica de Spruce Budworm ¹



El científico francés *René Thom* nacido en 1923 es el padre de la teoría de las catástrofes que está basada en la Topología y que sirve para explicar acontecimientos muy diversos como por ejemplo los terremotos o la dinámica de poblaciones de insectos. En palabras de su creador, “ .. se trata de una metodología o una especie de lenguaje que se esfuerza por describir las discontinuidades, que pudieran presentarse en la evolución de un sistema ..”. En cierta forma está conectada con los fractales, ya que como sabemos con ellos se pretende construir una geometría de las discontinuidades.

Spruce Budworm es un grupo de insectos cercano al género de las *Choristoneura*. Existe una docena de especies y subespecies distribuidas en el oeste de Estados Unidos y Canadá, donde producen un daño intenso en los bosques de coníferas.

Su dinámica está controlada por el siguiente proceso: durante años la densidad de población es pequeña y por tanto los árboles pueden crecer hasta su madurez momento en el que la población de Spruce Budworm aumenta de una forma extraordinaria

¹Basado en [21], página 303

alimentándose de las hojas de los árboles y produciendo su destrucción. Al faltar de nuevo el alimento la población de insectos disminuye hasta los niveles mínimos.

Las variables de estados que intervienen en el modelo son:

- $x(t)$ la densidad de población de budworm
- $y(t)$ la densidad de terreno
- $z(t)$ el porcentaje de hojas en los árboles.

Una primera aproximación al problema es el siguiente modelo matemático que describe la evolución en el tiempo de estas variables,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = R_1 x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K y(t)}\right) - \frac{C x^2(t)}{(K_1 y(t))^2 + x^2(t)} \\ \frac{dy}{dt} = R_2 y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K_2 z(t)}\right) \\ \frac{dz}{dt} = R_3 z(t) (1 - z(t)) - \frac{P x(t) z^2(t)}{y(t)} \end{cases} \quad (1)$$

En la primera ecuación podemos observar un crecimiento logístico de la población, con una tasa de crecimiento R_1 y una capacidad de carga variable $K y(t)$. La segunda parte de esta ecuación representa al efecto de la depredación de los insectos sobre las hojas de las coníferas, y viene modelizada por una función de *Holling* siendo C la tasa máxima de depredación.

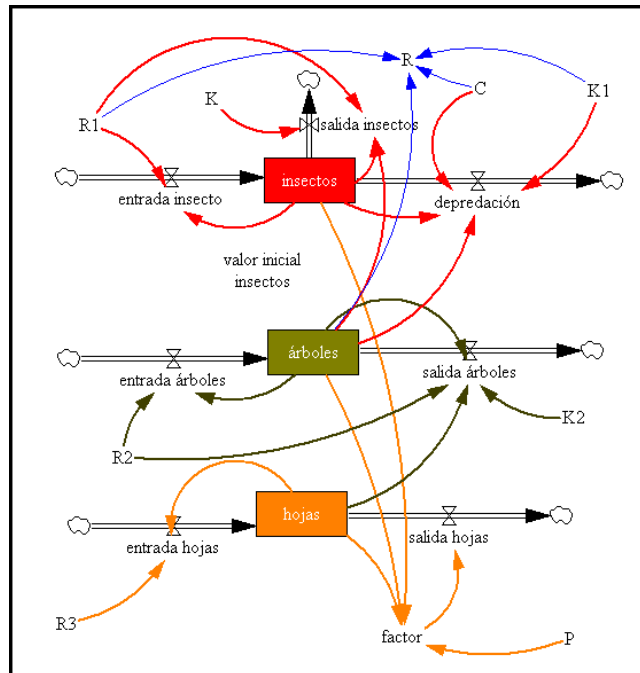


Figura 1.- Diagrama de *Forrester* del modelo

El Diagrama de *Forrester* asociado al modelo (1) se encuentra representado en la Figura 1 pero antes de proceder a su simulación realizaremos un breve estudio matemático de los puntos de equilibrio para los valores de los parámetros que definen al siguiente sistema,

$$\begin{cases} x' = 2x \left(1 - \frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{(0.1y)^2 + x^2} \\ y' = 3y \left(1 - \frac{y}{2.5z}\right) \\ z' = 2z(1 - z) - \frac{0.01xz^2}{y} \end{cases} \quad (2)$$

Para localizar los puntos de equilibrio del modelo tenemos que resolver el sistema de ecuaciones no lineal $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$. Si $x = 0$ se anula la primera ecuación y de las dos restantes obtenemos $z = 1$ y además $y = 2.5z = 2.5$. Para el resto de los puntos consideramos las funciones,

$$\varphi(x) = 2 \left(1 - \frac{x}{2.5}\right), \quad \phi(x) = \frac{x}{(0.1 * 2.5)^2 + x^2}$$

donde $\varphi(x)$ representa es la ecuación de una recta y $\phi(x)$ la gráfica en rojo de la Figura 2. Dependiendo de los valores de los parámetros, la recta puede tocar a la gráfica de la función $\phi(x)$ en uno (caso 1), dos (caso 2), o tres puntos (caso 3), dando lugar a uno, dos o tres puntos de equilibrio. En nuestro caso, las soluciones aportadas por Mathematica® (Figura 2 derecha) son:

$$C_1 = (0.1706, 2.499, 0.999), \quad C_2 = (0.5, 2.497, 0.998), \quad C_3 = (1.818, 2.499, 0.999),$$

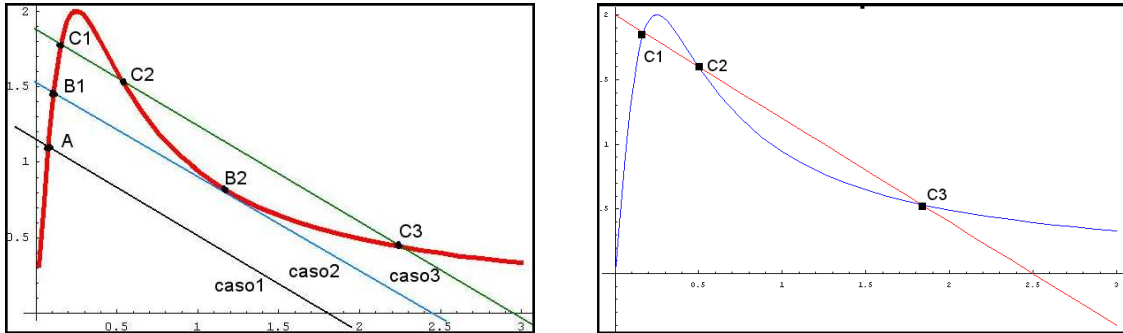


Figura 2.- Posibles posiciones relativas de $\varphi(x)$ y $\phi(x)$

Los puntos C1 y C3 son estables mientras que C2 es inestable como podemos comprobar realizando un análisis de sensibilidad del modelo (2) con Vensim® (Figura 3),

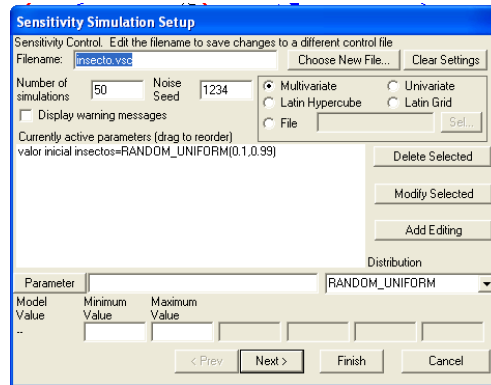


Figura 3.- Ventana del análisis de sensibilidad

con 50 simulaciones y variando el número inicial de insectos $x(0)$ desde 0.1 hasta 0.99 (Figura 4)

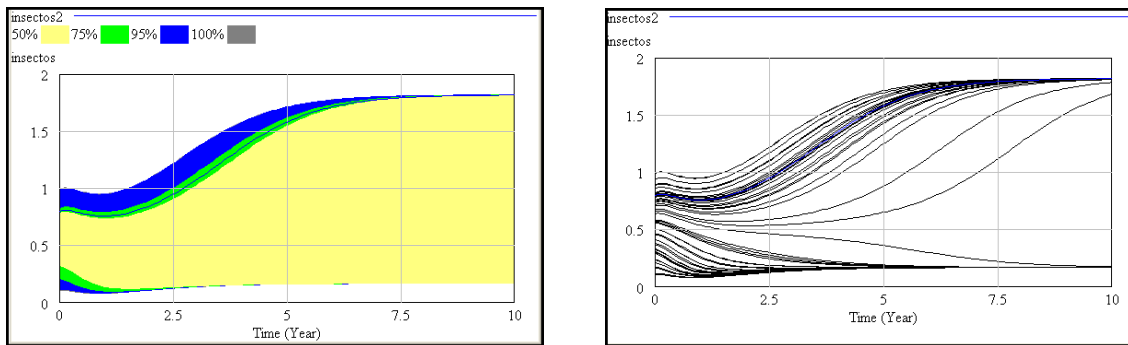


Figura 4.- Resultados. Izquierda: intervalos de confianza. Derecha: trazos individuales

Las ecuaciones introducidas en el programa correspondientes al modelo (2) son,

```

insectos = INTEG(+entrada insecto - depredacion - salida insectos, valor
                inicial insectos)
valor inicial insectos = 3
entrada insectos = R1 * insectos
salida insectos = R1 * insectos * insectos / (K * arboles)
depredacion = C * insectos * insectos / ((K1 * arboles)2 + insectos2)
arboles = INTEG(entrada arboles - salida arboles, 2.5)
entrada arboles = R2 * arboles
salida arboles = R2 * arboles * arboles / (K2 * hojas)
hojas = INTEG(entrada hojas - salida hojas, 0.5)
entrada hojas = R3 * hojas * (1 - hojas)
salida hojas = factor; factor = P * insectos * hojas * hojas / (arboles)
R1 = 2;    K = 1;    C = 1;    K1 = 0.1
R2 = 3;    K2 = 2.5;    R3 = 2;    P = 0.01
R = (R1 * K1 * Arboles) / C

```

En la Figura 5 se comprueba la estabilidad de las soluciones ya que $x(t) \rightarrow (1.818, 2.5, 1)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

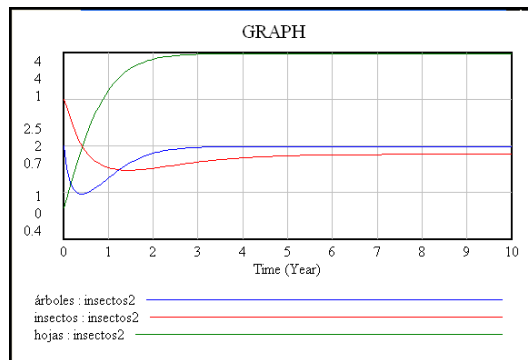


Figura 5.- Estabilidad de las variables de estado

A continuación hemos realizados análisis de sensibilidad para los valores de los parámetros K_1 y K_2 . En ambos se han realizado 200 simulaciones con $0.1 \leq K_1 \leq 1$ en el primer caso (Figura 6 derecha) y con $0.8 \leq K_2 \leq 4.5$ en el segundo (Figura 6 izquierda), para comprobar la influencia de estos parámetros en el comportamiento del modelo.

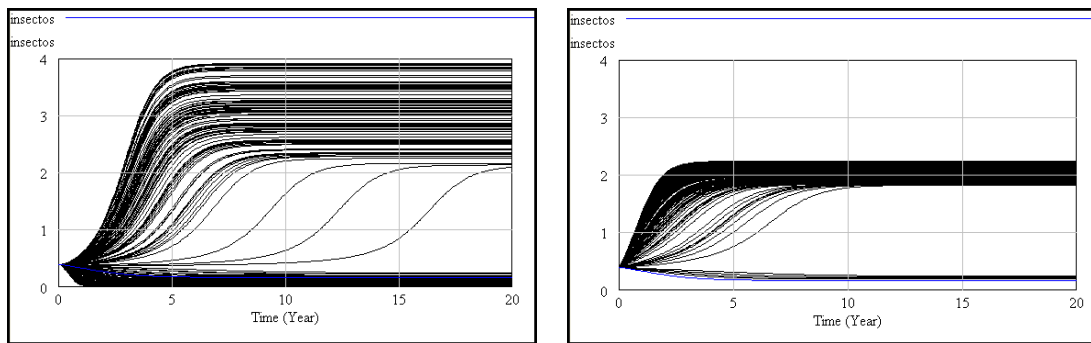


Figura 6.- Estabilidad de las variables de estado

Por último, en la Figura 7 puede verse la gráfica correspondiente a la variable R definida como $R_1 K_1 y(t)/C$.

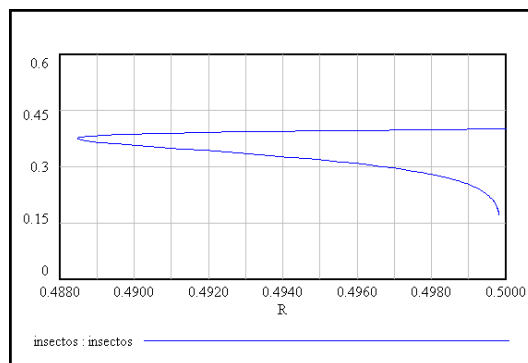


Figura 7.-

Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BELTRAMI E. *Mathematical Models for Society and Biology*. Academic Press, San Diego, (2002).
- [5] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [6] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [7] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [8] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [9] CHUN-LIAN ZHU; YA JIA; QUAN LIU; XUAN ZHAN *A mesoscopic stochastic mechanism of cytosolic calcium oscillations*, Biophysical Chemistry, 125, 201-212, (2007).
- [10] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [11] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [12] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics*

as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).

- [13] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.
- [14] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [15] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [16] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [17] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, nº 3, 395-406, (2003).
- [18] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [19] GÜNDÜZ *Ancient and Current Chaos Theories*, Interdisciplinary Description of Complex Systems, Vol. 4, nº 1, 1-18, (2006).
- [20] HAEFNER, J.W. *Modeling Biological Systems. Principles and Applications*. Chapman and Hall, New York, (1996).
- [21] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [22] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [23] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [24] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [25] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [26] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).

- [27] MAHAFFY J.M.; ZYSKIND J.W. *A model for the initiation of replication in Escherichia coli*. Journal Theory Biology, **140**, 453-477, (1989).
- [28] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [29] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [30] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [31] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).
- [32] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [33] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [34] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [35] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [36] VRIES G. DE; HILLEN T.; LEWIS M.; MÜLLER, J. SCHÖNFISH B. *A Course in Mathematical Biology. Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. SIAM (Mathematical Modeling and Computation) (2006).
- [37] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [38] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (Dipsacus sylvestris) Huds*. Ecology 58: 1103-1111, (1977).
- [39] YEARGERS E.K.; SHONKWILER R.W.; HEROLD J.V. *An Introduction to the Mathematics of Biology: with Computer Algebra models*, Birkhäuser, Berlin, (1996).