

MODELOS MATEMÁTICOS BASADOS EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

El bruselator ¹



En 1963 *E.N. Lorenz* con el trabajo “Deterministic Nonperiodic Flow” revolucionó al mundo científico al presentar una nueva teoría conocida con el nombre de la Teoría del Caos. Al contrario de lo que pasa con el resto de las teorías donde su implantación se hace de una manera lenta y progresiva, el caos fue aceptado de forma inmediata y traspasado del campo de la Física a otros muy diversos.

Modelos matemáticos muy elementales, como el modelo discreto logístico:

$$x_{t+1} = \lambda x_t(1 - x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

presentan comportamientos caóticos para valores concretos del parámetro $\lambda > 0$. Una de las razones de tal proceder se debe al carácter no lineal de las relaciones entre los elementos del sistema, en nuestro ejemplo de la ecuación logística.

En esta sección analizaremos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en el contexto de las reacciones químicas, del tipo $A + X \longrightarrow 2X$, donde la producción del elemento X se obtiene del mismo producto X y del A .

En general, la reacción anterior se descompone en una serie de estados intermedios

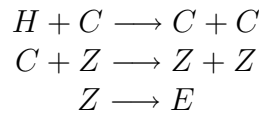
¹Basado en [21], página 77

estudiados inicialmente por *A.M. Turing* y posteriormente por el premio nobel *L.I. Prigogine* en Bruselas y se conocen con el nombre de bruselator,



Se puede alcanzar el equilibrio en estas reacciones si añadimos constantemente los productos *A* y *B* y al mismo tiempo extraemos *D* y *E*.

Como suele ocurrir con los modelos matemáticos, este tipo de modelos puede trasladarse a contextos muy diferentes como por ejemplo a los sistemas ecológicos. *G. Gündüz* en [19], propone las siguientes relaciones entre la hierba (*H*), los conejos (*C*) y los zorros (*Z*),



como puede apreciarse, los conejos comen hierba y después se multiplican. Del mismo modo, en la segunda de las relaciones, los zorros se alimentan de conejos y su población crece. Finalmente, por la tercera relación los zorros se extinguen.

De (1), y procediendo de forma similar a como lo hicimos en el modelo de *Michaelis-Menten*, se deduce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, donde para simplificar se ha considerado todos los parámetros unitarios,

$$\begin{cases}
 \frac{dX}{dt} = \phi(X, Y) = A + X^2 Y - B X - X \\
 \frac{dY}{dt} = \varphi(X, Y) = B X - X^2 Y
 \end{cases}
 \tag{2}$$

A partir de este sistema es inmediato construir el siguiente diagrama,

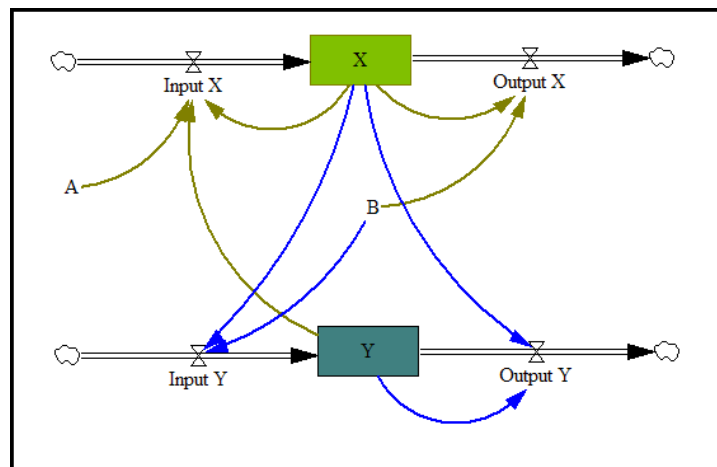


Figura 1.- Diagram de *Forrester* de (2)

siendo sus ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 X &= \text{INTEG}(\text{Input } X - \text{Output } X, 0.7) \\
 Y &= \text{INTEG}(\text{Input } Y - \text{Output } Y, 2/0.7) \\
 \text{Input } X &= A + X * X * Y; & \text{Output } X &= B * X + X \\
 \text{Input } Y &= B * X; & \text{Output } Y &= X * X * Y \\
 A &= 0.7; & B &= 2
 \end{aligned}$$

El resultado de la simulación con Vensim® permite comprobar que para valores iniciales $X(0) = 0.7; Y(0) = 2/0.7$ las soluciones son constantes y por lo tanto el punto $P = (0.7, 2/0.7)$ es de equilibrio. Además, se trata de un equilibrio inestable ya que al modificar ligeramente los valores, $X(0) = 0.75, Y(0) = 2.85$, las variables de estado, a largo plazo, no regresan al punto de equilibrio.

Para valores iniciales diferentes a los del punto de equilibrio el sistema se comporta de forma periódica (Figura 2),

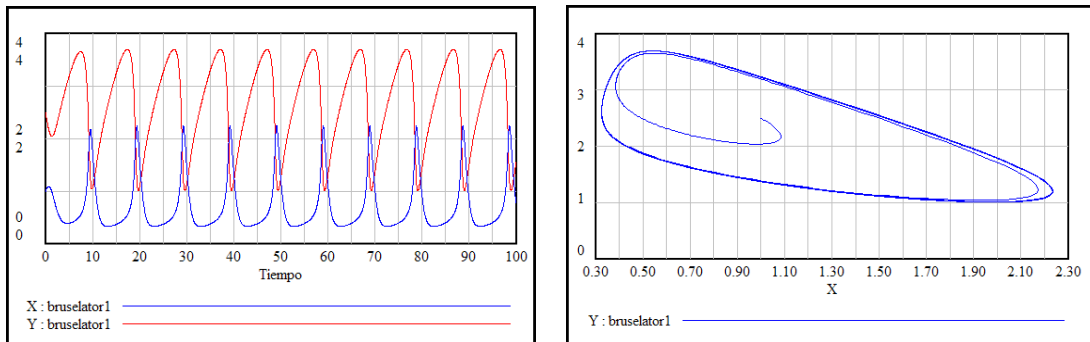


Figura 2.- Simulación de (1) con $A = 0.7; B = 2, X(0) = 1; Y(0) = 2.5$

y el sistema alcanza un ciclo límite (Figura 2 derecha y Figura 3).

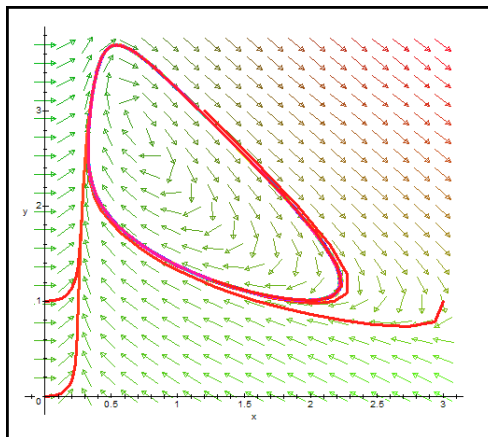


Figura 3.- Campo de direcciones de (1) con $A = 0.7; B = 2;$ y diferentes valores iniciales

A continuación realizaremos un breve estudio matemático del sistema (2) siendo $A > 0$ y $B > 0$ con el objetivo de confirmar los resultados obtenidos en la simulación.

Resolviendo el sistema no lineal $\phi(X, Y) = 0$, $\varphi(X, Y) = 0$ se obtiene un único punto de equilibrio $P = (A, B/A)$. Para clasificarlo, será necesario encontrar la matriz jacobiana particularizada en el punto P ,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial X} & \frac{\partial \phi}{\partial Y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X} & \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2XY - 3 & X^2 \\ 2 - 2XY & -X^2 \end{pmatrix}; \quad J_1 = \begin{pmatrix} -1 + B & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}$$

La traza de la matriz J_1 es $-1 + B - A^2$ y su determinante asociado es $A^2 > 0$. Por tanto, para que el punto $P = (A, B/A)$ sea estable deberá suceder que $\text{Traza}(J_1) = -1 + B - A^2 < 0$; es decir $B < A^2 + 1$.

En concreto, para los valores de la simulación $A = 0.7$; $B = 2$ el punto $P = (0.7, 2/0.7)$ será inestable. Por ejemplo, si $A = 3$; $B = 2$ el punto de equilibrio $P = (A, B/A) = (3, 2/3)$ será asintóticamente estable, como puede apreciarse en las Figuras 5 y 6.

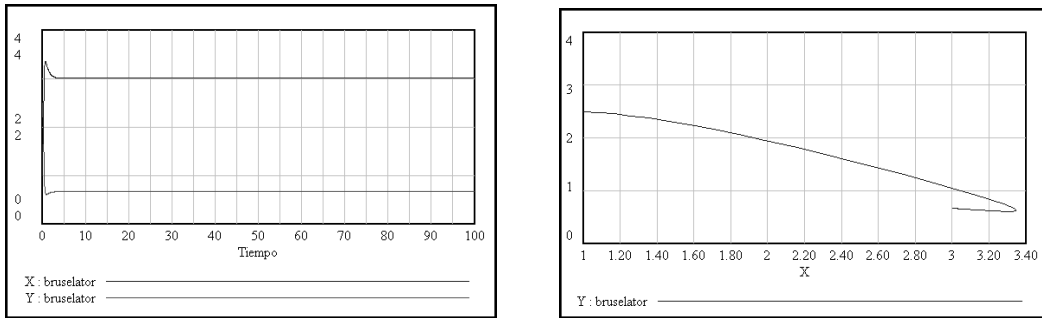


Figura 5.- Simulación de (1) con $A = 3$; $B = 2$, $X(0) = 1$; $Y(0) = 2.5$

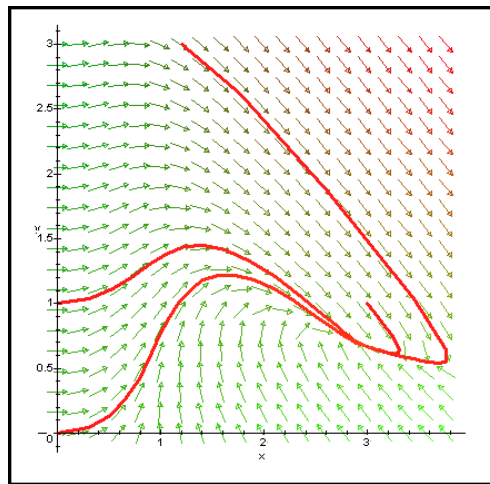


Figura 6.- Campo de direcciones de (1) con $A = 3$; $B = 2$; y diferentes valores iniciales

Bibliografía

- [1] ALLMAN E.S.; RHODES J.A. *Mathematical Models in Biology. An Introduction*. Cambridge University Press, (2004)
- [2] ARANA J. Seminario impartido en Palencia el 5 de abril de 2001.
- [3] BATSCHELET E.; BRAND L.; STEINER A. *On the Kinetics of lead in the human body*. Journal of Mathematical Biology 15-23, (1979).
- [4] BELTRAMI E. *Mathematical Models for Society and Biology*. Academic Press, San Diego, (2002).
- [5] BORRELLI R.; COLEMAN C.S. *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelización*. Oxford University Express, Mexico, (2002).
- [6] BRITTON N.F. *Essential Mathematical Biology*. Springer-Verlag, London, (2003).
- [7] CAUGHLEY G. *Mortality patterns in mammals*. Ecology, **47**, 906-918, (1966).
- [8] CAUGHLEY G.; GUNN A. *Conservation Biology in Theory and Practice*. Blackwell Science, Massachusetts, 147-149, (1996).
- [9] CHUN-LIAN ZHU; YA JIA; QUAN LIU; XUAN ZHAN *A mesoscopic stochastic mechanism of cytosolic calcium oscillations*, Biophysical Chemistry, 125, 201-212, (2007).
- [10] CONEJERO C.M.; MARTÍNEZ FUNES J.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Aplicación de la Geometría fractal a la Ecología de Paisajes*. Departamentos de Matemática y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [11] DE L HAZA I.; COBO-MOLINOS J.; GARRIDO-GARCÍA M. NAVAS J.; RUEDA P.; TORRES C.; CARÚZ A.; ESTEBAN F.J. *Fractal dimension of U373 astrocytoma cells in DMEM or RPMI cultures*. HarFA -Harmonic and Fractal Image Analysis 94-96, (2005). [http : //www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf](http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/download_ejournal/221.Haza.pdf)
- [12] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; JIMÉNEZ J.P.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P. *System Dynamics*

as a tool in Stem Cells/Tissue Engineering. Histology and Histopathology, Suppl. 1, 150-151, (2005).

- [13] ESTEBAN F.J.; NAVAS J.; QUESADA J.M. *Aplicaciones bioinformáticas en la docencia de Modelos Matemáticos en Biología*. II Reunión de la Red de Bioninformática de Andalucía. Baeza, ESPAÑA.
- [14] FOLLARI, R. *Interdisciplinaridad, espacio ideológico*. Simposio sobre Alternativas Universitarias, UAM-Azcapotzalco, México, (1980).
- [15] FONTDEVILA, A. M. *Introducción a la genética de poblaciones*. Síntesis, Madrid 112-117,(1999).
- [16] FORESTER, J.W. *Principles of Systems*. SMIT Press, Cambridge, M.A.(1968).
- [17] GALACH, M. *Dynamics of the tumor-immune system competition. The effect of time delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.,Vol. 13, nº 3, 395-406, (2003).
- [18] GARCÍA CASTRO A.; GARRIDO PALOMERA E., ENDRINO M.I.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Dimensión Fractal de Imágenes MRI-T2 en la enfermedad de Alzheimer*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [19] GÜNDÜZ *Ancient and Current Chaos Theories*, Interdisciplinary Description of Complex Systems, Vol. 4, nº 1, 1-18, (2006).
- [20] HAEFNER, J.W. *Modeling Biological Systems. Principles and Applications*. Chapman and Hall, New York, (1996).
- [21] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 82-86, (1997).
- [22] HANNON B.; RUTH M. *Modeling Dynamic Biological Systems*. Systems Springer, New York 65-68, (1997).
- [23] HARTLOVE J.; SHAFFER D.; RAGAN S. *Glucose-Insuline Model*. The Maryland Virtual High School of Science and Mathematics, (2001).
- [24] HORN H.S. *The ecology of secondary succession*. Annual Review of Ecology and Systematics 5:25-37, (1974).
- [25] LEMAIRE V.; TOBIN F.L.; GRELLER L.D.; CHO C.R.; SUVA L.J. *Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling*, Journal of Theoretical Biology, 229, 293-309, (2004).
- [26] LI B.L. *Ecological Modelling*, 132, 33-50, (2000).

- [27] MAHAFFY J.M.; ZYSKIND J.W. *A model for the initiation of replication in Escherichia coli*. Journal Theory Biology, **140**, 453-477, (1989).
- [28] MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature*, Eds. W.H.Freeman and Company, New York, (1983).
- [29] MARTÍN-GARCÍA J. *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*, Barcelona, (2003).
- [30] NOWAK M.A.; MAY R.M. *Virus Dynamics*, Oxford University Press, New York 16-26, (2000).
- [31] MARUSIC M., BAJZER Z., FREYER J.P.; VUC-PAVLOVIC, S. *Analysis of growth of multicellular tumour spheroids by mathematical models*. Cell, Prolif., **27**, 73-94, (1994).
- [32] NAVAS J.; QUESADA J.M.; GOÑI J.; VÉLEZ DE MENDIZÁBAL N.; VILLOSLADA P.; ESTEBAN F.J. *Glioma-Immune evasion: a system dynamics approach*. proceedings of the II International Conference on Computational Bioengineering, 699-710, Rodrigues et al. (Eds.), IST Press, ISBN: 972-8469-37-3, (2005).
- [33] ORTEGA H. *Un modelo logístico para el crecimiento tumoral en presencia de células asesinas*. Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica, volumen **XX**, nº 3, 61-67, (1999).
- [34] RIOS, S. *Modelización*, Alianza Universidad, Madrid, (1995).
- [35] SERRANO C.; RODRÍGUEZ I.; MARTOS D.; NAVAS J.; ESTEBAN F.J. *Geometría Fractal de la Sustancia Blanca Cerebral durante el desarrollo de Esclerosis Múltiple*. Departamentos de Matemáticas y Biología Experimental, Universidad de Jaén, (2005).
- [36] VRIES G. DE; HILLEN T.; LEWIS M.; MÜLLER, J. SCHÖNFISH B. *A Course in Mathematical Biology. Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. SIAM (Mathematical Modeling and Computation) (2006).
- [37] WARTON D.A.; GRAHAM W. *An approach to the teaching of host-parasite population modelling*. International Journal for Parasitology vol. 19; 451-45, (1989).
- [38] WERNER P.A.; CASWELL H. *Population growth rates and age vs. stage distribution models for teasel (Dipsacus sylvestris) Huds*. Ecology 58: 1103-1111, (1977).
- [39] YEARGERS E.K.; SHONKWILER R.W.; HEROLD J.V. *An Introduction to the Mathematics of Biology: with Computer Algebra models*, Birkhäuser, Berlin, (1996).